

逻辑与演绎科学方法论导论

塔尔斯基著

周礼全 吴允曾 晏成书合译

内部发行

商务印书馆

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM



邏輯与演繹科学方法論导論

塔 尔 斯 基 著

周礼全 吳允曾 晏成书合譯

內 部 讀 物

商 务 印 书 館

1963年·北京

Alfred Tarski
**INTRODUCTION TO LOGIC
AND TO THE
METHODOLOGY OF DEDUCTIVE SCIENCES**

Revised edition 1946
Oxford University Press.
New York

Original in Polish language
Translated by Dr. O. Helmer
From German

内部读物
逻辑与演绎科学方法论导论
塔尔斯基著
周礼全 吴允曾 晏成书合译

商 务 印 书 馆 出 版
北京复兴门外翠微路
(北京市书刊出版业营业许可证出字第107号)
新 华 书 店 经 售
新 华 印 刷 厂 印 装
统一书号：2017·82

1963年3月初版	开本 850×1168 1/32
1963年3月北京第1次印刷	字数 213 千字
印张 9 6/16	印数 1—3,000 册
定价 (9) 1.30 元	

俄 譯 本 序 言

著名的波兰数学家和邏輯家塔尔斯基的这本书，是数理邏輯和演繹科学方法論的通俗引論，它值得受到苏联讀者的注意。它在1936年以波兰文出版，1937年譯成德文，由德国著名的斯普林格书局在維也納而不在德国出版。尽管如此，这並沒有帮书局的忙，书局沒有来得及在1938年德国并吞奥国以前把书全部推銷出去，因此有一部分始終被擱在书店的倉庫里……这是由于种族歧視的緣故。1941年书的校訂和补充版本在紐約用英文出版，俄文翻譯是根据这个版本完成的。

这本书原来称为《数理邏輯和数学方法論导論》。这个名称与內容更相符合，因为这本书是一門科学的导論，这門科学的主要結果多半是数学专家在二十世紀近几十年获得的。尽管数理邏輯的工具以及数理邏輯中所使用的符号“語言”具有很專門的性质，作者成功地引导讀者到这里所考虑的問題的領域中去，几乎沒有用任何的專門符号，而使用通俗易解的語言。书中所涉及的問題的範圍很广，讀者在这里会找到关于命題邏輯問題的討論，关于集合(类)、性质、关系、函数、运算、同一与相異等概念邏輯方面的討論，关于形成概念的原則(包括所謂的抽象原則)和定义概念的方法的討論，以及关于形成命題和从一些命題推出一些命題的方法的討論，等等。书中有專門的章节用来討論演繹理論构造的原則，这就是所謂的公理學方法，和与之相联系的无矛盾性和完全性問題。一些最一般的数学理論的构造是在表示現代数学特点的方法和概念(例如，从集合論或阿貝尔群論借用来的方法和概念)的基础上

作出的，自然，所有陈述出来的原則都可以应用到这些最一般的数学理論的构造上去。

作者在书的序言中說明了自己对于数理邏輯与演繹科学方法論的意义和本质的一般观点。为了批判地討論他所提出来的原理，首先那怕是粗淺地說明一下我們对于书中所討論的問題的真实意义的見解，在我看来是适宜的。我們简单地讲两点。

1. 与形而上学相反，唯物辯证法教导說：真理总是具体的，也就是說，在此时此地和一定条件下真的东西，在另一地点、另一時間或者在另一些条件下可能不真。因此，对于所有用一般形式提出来的問題，不能給出“断然的”回答，是或否。斯大林在1904年写道：“伯恩施坦的信徒們也曾要求馬克思主义者同样断然地回答下面這個問題：合作社（即消費生产互助社）对于无产階級有益还是有害？馬克思主义者当然不难证明，这样提出問題是毫无意义的。他們很簡明地解釋了：一切都以時間、地点为轉移，——在无产階級的階級覺悟已提高到应有程度的地方，在无产者已團結成一个强固的政党的地方，如果合作社是由党着手建立和領導的，那它对无产階級就会有很大的益处；而在沒有具备这些条件的地方，合作社对于无产階級就会是有害的，因为合作社能使工人产生小商人的傾向和行会的閉关自守的心理，从而損害工人的階級覺悟。”^①

我們知道，从形式邏輯的規律，例如矛盾律和排中律，得出“断然的”回答，“是”或“否”，是永远可能的，但是形式邏輯的規律却不能机械地应用到所有的命題上去，像形而上学者在这点上所想的那样。

^① 《社会民主党怎样理解民族問題？》，《斯大林全集》第1卷，人民出版社1953年版，第42—43頁。

研究者的技巧相当大的程度上在于，估計到环境、地点和時間这些具体条件，这样来提出問題，以便形式邏輯的規律适用于它們，以便对于問題的回答能說明所研究对象的一些最本质的方面。^① 难怪人們說，問題的正确提法有时并不比問題的解决价值少。既然数学所处理的是比較普通的对象和关系，在这里获致精确的提法也就比較容易。然而，为了这个目的就不仅要拟定專門的術語，而且要制作出一些科学的、“形式化”的特殊方法，这些方法是数学所特有的，因为在数学中我們所处理的是字母演算。

其实，这种方法是自发地創造出来的，从古代开始，在像欧几里德或者阿基米德这些数学家的著作中就已經有了。由于洛巴契夫斯基的偉大发现及現代集合論数学的建立，产生了一系列的問題。这一系列的問題使得数学家把原来屬於邏輯和数学方法論領域的数学证明論的問題作为專門研究的对象。在現代，数理邏輯以及和它直接联系的演繹科学方法論是一門相当发达的科学，有它特有的問題范围；有科学研究的專門工具；以及一系列最后确立的有意义的重要結果，这些結果既是借助于分析現有演繹理論所获得的，同时也預告着这些演繹理論的发展，因為它們屬於一定种类的任何可能的演繹理論。既然这里首先考虑的正是一些数学学科，并且所談的那些結果基本上是用数学方法得到的；那么系統地充分地說明它們必須以專門的数学修养为前提。可是作者还是成功地說明了十分广泛範圍內的問題，而沒有假定讀者有超出中等学校数学課程大綱的訓練。还因为，例如說，相应于所討論的內容，

① 同时應該注意，当情况变化时，也必須相应地改变問題的提法，因此，只有彻底辯证唯物主义地說明对象（即邏輯的和历史的处于統一之中，而邏輯的包括历史的），才是正确的。（前面所举的例子教导我們，恰恰是当某种条件变化时，公式也應該改变——这个例子特別說明了这一点。）

“形式化”方法的選擇和陳述的精確性問題，^①具有一般的科學意義，所以對於不接近數學的讀者，塔爾斯基的書也能够引起興趣。

2. 對於邏輯感覺興趣，特別是對於其中的現代數理邏輯部分感覺興趣的讀者，在書中會找到一些內容，使他能够對於數理邏輯的內容和方法形成清晰的概念，並且使他能够闡明數理邏輯的基本特點。這使他可能熟諳地批判地對待資產階級哲學家的企圖，他們想利用這個領域中科學的進展向唯物主義進行鬥爭，和宣傳露骨的或混亂的折衷主義和唯心主義的哲學立場（其中包括本書作者本人在內）。在這方面我們只想提請讀者注意作者所熟練應用的數理邏輯的特點（它與一切字母演算共有的特點），以及他一再強調的，數理邏輯與數學的密切聯繫。

字母演算之引入〔為維他（F. Vieta, 1540—1603）和笛卡兒（Descartes, 1596—1650）在17世紀前半期所引入〕到數學中，在這門科學的發展中起革命性的作用。恩格斯說，“笛卡兒的變數是

① 追求“形式化”的科學的嚴格性、精確性和確定性、真正反映事物的本質，根據真理的具體性原理的構造，自然，應該把這一切區別於煩瑣哲學的玩弄“嚴格性”和相應地“創作”形形色色的專門術語的詭計與毫無內容的空洞“形式”。我們看到，真正科學的“形式化”本身可能是新的，對於科學發展很本質的問題提法的源泉。例如，對於數學中連續曲線概念來說，就是如此。很長一個時期它好像是立即明顯的，而不需要說明。在18世紀末與數學物理問題相聯繫產生一場“關於聲弦”的熱烈爭論，在這場爭論中，有像歐拉（L. Euler, 1707—1783）、達朗貝爾（d'Alembert, 1717—1783）、貝努利（Bernoulli, 1700—1782）和拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736—1813）這樣一些卓越的數學家參加，這使得數學家們相信，事情不是像看起來那樣簡單。在19世紀引入的連續性概念的精確陳述第一次使得能够嚴格的證明一系列的命題，以前數學家實際上在大量的情形中利用這些命題而沒有意識到連續性概念。然而不久發現，連續性定義的這種陳述意外地滿足象填滿整個正方形所有點的貝安諾曲線，或連續而無處可微分的波查諾、魏爾施特拉斯函數，這種函數對應於在每一個點上沒有方向的曲線。這些發現對於科學的進一步發展具有根本的意義。一方面，這樣被發現的曲線是具有深刻的現實意義的。另一方面，連續性概念進一步區分的問題提出來了（而且已經解決），這種區分使得能够更好地表現原來考慮的，然而還不能精確定義的形式。

数学中的轉折点。”

虽然在“变数”和变数在現代数学中的使用之間有一个本质的差異，但是維他和笛卡儿所創造的字母演算和作为現代数学的特点的演算已經有了許多共同的特点。它們的基本特点在于，虽然在口头論述中沒有人想到把命題相“加”或者相“乘”——用表达命題的公式，可是在这些演算中却已經可能根据有时很像普通算术那样的規則来进行演算。例如，可以依一定的方式加等式或不等式，用数去乘它們等等。大概任何曾經学过代数的人也都会記得，用数学中使用变数特有的代入規則来代替从一般到特殊的普通代換，例如教他不說“因为被加数的次序对于和数无关，所以 $7+5=5+7$ ”，而要他在公式 $a+b=b+a$ 中把 $a=7$, $b=5$ 代进去是多麼不习惯。

不用說，一般而論，沒有公式的使用，一些数学推論几乎不能实现，公式的使用有时在非数学家看来，好像是特別为了使人难于理解数学著作而創造的。其实，略微熟悉数学公式就使我們能把它們分成兩組：

(1) 公式

$$2+2=4,$$

$$2+2=5,$$

$$2<3,$$

$$a+b=b+a,$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2,$$

表示真或假，而

(2) 公式

$$2+2,$$

$$\frac{2 \cdot (3+2)}{7},$$

$$2 \sin \frac{\pi}{5},$$

$$\log_{10} 3,$$

表示一些对象(不同于真和假的),在所給的情形中,它們表示完全确定的数。后一种公式的显著特点表示:像“4”一样,“ $2+2$ ”也是一个确定的数的指示詞,公式 $\frac{2 \cdot (3+2)}{7}$ 不仅表示由

(1) 3 和 2 相加,

(2) ~~二倍所得的结果,~~

(3) 把所得的除以 7。

~~这一系列运算组成的~~获得某数的方法,而且还有由这个方法得到的结果,在这里,这结果与数 $1\frac{3}{7}$ 相同。

要注意,正是结果与导致它的方法的这个辯证的統一在現代数学中广泛地得到利用,这样,借助于指出一个对象可以由其它几个对象来构造的方法,使我們能規定这个对象(例如,定积分)。我們也要指出,在数学中某些困难和这有关,这些困难是这样引起来的,即,事实上不是每一种方法都得出結果;因此需要一种标准,使得我們能够把“收敛”的方法和那种不能有意义地得出确定結果的方法区别开来。

这种特点引起了要特別研究邏輯方法的願望,这些邏輯方法正是数学演算的特征。另方面,甚至这种研究的最初嘗試應該是推动研究者去发现下述情形,即这种方法不过是普通邏輯規律的另外一种形式,或許邏輯本身也可以解釋成为某种演算(至少在这里所說的数学中所用的邏輯方法是如此),这是不奇怪的。

萊布尼茲 (Leibniz, 1646—1716) 第一个从事这样的嘗試,他把維他和笛卡儿的字母演算的思想推广到他所建立的微积分学上

去，^①也推广到邏輯上去。然而在邏輯領域中萊布尼茲的思想对于这一科学的发展沒有发生重要的影响。19世紀一些数学家和邏輯学家作了一系列的努力来建立邏輯代数，其中必須首先提到德·摩根(A. De Morgan, 1806—1878)，布尔(G. Boole, 1815—1864)，皮尔斯(Ch., S. Peirce, 1839—1914)，习玉德(E. Schröder, 1841—1902)，俄罗斯学者喀山数学家和邏輯学家波列茨基(П. С. Πο-рецкий, 1846—1907)。但是只是在20世紀这些研究才受到真正的注意，这时与数学基础的危机相联系，关于在数学基础中所容許的构造对象或者規定对象的手段，和命题证明的手段的問題便尖銳地突出出来了。

誠然，关于和数学基础的危机相联系的問題，塔尔斯基在他的书中几乎沒有談到；在书中沒有說明一系列数学基础原有的重要結果，例如，与形式化“語言”中“真理性”概念相关的結果或与演繹理論的“无矛盾性”和“完全性”的各种定义相关的結果。他觉得它們对于通俗的叙述过于困难，而他屢次強調，他的书只是个引論。作为引論，这本书实在令人滿意。书的开端已經很好；一开始，作者就闡明数学中的值和数学中使用的变数方法，而且立即討論作为数学学科的特点的两种类型的公式：(1)命题函項，和(2)指示函項。也应当指出这种情形，就是作者成功地避免了在书中有过多的形式計算，而把相应的材料放到练习中去。当然，最后这一点是以讀者能够做出所有附在每一章后面的练习，包括那些对于演算工具的构造原則上很重要的問題为先决条件的。这些练习中的多

① 上面我們援引的恩格斯的話完全說出来是这样的：“笛卡儿的变数是数学中的轉折点。因此运动和辯证法便进入了数学，因此微分和积分也就立刻成为必要的了，而它們也就立刻产生出来，并且整个讲来它們是由牛頓和萊布尼茲完成的，而不是由他們发现的。”(《自然辯证法》，人民出版社，1955年版，第217頁)

数是适当地选择和表述出来的，它們是这样简单，的确使得讀者能够独立地做出来。

在本书的哲学方面，情形就坏得多。作者在一系列的場合有着形而上学的，有时接近馬赫主义的、混乱的唯心主义的观点。所以，他強調在数学中不存在“变数”之类的对象，說它“不可能有任何确定的性质，例如它不是正数，也不是負数，也不等于零。或者說， x 的性质是随着情形不同而变化的；有时它可以是正数，但有时又可以是負数，有时又可以等于零。”在这个地方他以以下的話作結：“这样一种东西，在我們的现实世界中根本是找不着的。这样的东西如果存在于现实世界，那将会是違背我們思想的根本規律的。” (§1) 結果：客观世界的規律为我們的思維規律所制約，这是露骨的唯心主义和形而上学的主張。因为，相反，在现实世界中一切在变化着和运动着；具有某种性质的对象会失掉这种性质；相反，沒有某种性质的对象也可以有这种性质；必須多研究具体材料，以便在变化中划分出稳定的、不变的东西，以便反映运动，然后再找出在变化中的不变的規律（規律就是稳定的东西），等等。“如果不把不間断的东西割断，不使活生生的东西簡單化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那么我們就不能想像、表达、測量、描述运动。思維对运动的描述，总是粗糙化、僵化的。不仅思維是这样，而且感觉也是这样；不仅对运动是这样，而且对任何概念也都是这样。

这也是辯证法的本质。对立面的統一、同一这个公式正是表現着这个本质。”^① 塔尔斯基的书的相当一部分內容事实上正是关于科学的概念和命题的“形式化”方法，其目的在使它們服从形式

① 列宁：《哲学筆記》人民出版社，1957年，第263頁。

邏輯的規律。閱讀這本書有時給人一種印象，似乎作者認為演繹理論的命題本身，完全自効地預先就服從這要求。誠然，在他的專門性著作中，我們沒有遇到這種情形。

塔爾斯基的哲學立場畢竟不是十分確定的。作為創造性地工作着的數學家，他有時自發地站在健康的唯物主義立場上。例如，他——當然，有保留地，並且也沒有指出姓名——反對羅素 (Russell) 有名的說法：在數學這種科學里，我們不知道我們在說什麼，也不知道我們說的是否真實。他寫道：“我們必須批判地看待這些判斷……有時我們發展一種演繹理論而對於它的基本詞項不賦與任何固定的意義，這樣就是將這些基本詞項看作變項；在這種情形之下，我們說我們將這一理論看作一種形式系統，但這是比較少見的情形（即使考慮到 §36 中對於演繹理論的一般刻劃中所說的也是如此）。僅當對於這一理論的公理系統可能給以幾種解釋時這種情形才會發生，也就是說，如果對於這一理論中的詞項可以有幾種不同的方式賦與意義，而我們不願意特別着重任何一種時，才會發生。” (§38)

在某種程度內關於他對於邏輯的態度也可以這樣說。一些現代的邏輯家從反動的資產階級哲學和馬赫主義達到數理邏輯，^①作者和這些邏輯家不同，他不把邏輯看成是任意的“語言”，而且認為邏輯不應當發生在任何內容豐富的科學理論之先。依照他的說法，他是用“邏輯”一詞來“稱呼這樣一種科學的，這種科學分析一切科學中共同的概念的意義，建立這些概念所服從的一般規律”與關於邏輯的對象或內容的問題相聯系，他談到思維的規律，還談到在邏輯中我們一般不處理任何個別的概念（它們對應於性質和

① 例如卡爾納普 (R. Carnap) 就是這種人。

关系)或个别的对象。^①然而在书中关于这些问题我們没有找到十分明确的东西。首先,哲学的基本問題——关于思維与存在之間的关系的問題,从而在思維規律和其中所反映的自然与社会的規律之間的关系的問題——仍然曖昧不明。数学与邏輯之間的关系問題也沒有对讀者說清楚。要知道,像“一”、“二”等这样一些概念能够用邏輯的詞項来表示,它們仍然是个別的概念(并未变成可以把任何的个别概念放到它們的位置上的变数)!此外,既然主張,只要把无穷性公理包括在邏輯中,就可以把算术看成邏輯的一部分,那么甚至对讀者也会造成一种印象:這個問題本质上是无意义的,假如,依照定义,把数学的基本概念和公理包括在邏輯中,那么数学,或者至少是它的某一部分,自然将是邏輯的一部分。

这里我們不可能把我們认为需要批判或者詳述的地方一一細說。并且,大多数場合,这需要先熟悉书的正文。因此,在这些地方,編者认为給以附注比較妥当。这里我們只談一个具有原則意义的問題。

从辯证唯物主义观点看来,实践不是在理論之外的某种东西。理論依賴于实践,假如它不为实践所证实,它就沒有意义。归根結底,只有一个真理的标准——实践的标准。假如形式邏輯的证明使我們相信数学命題的真实性,那么这是由于借助于这样的证明,所給命題的真实性归結为:(1)其它一些命題即被当作公理的那些命題的真实性,所給命題的真实性归根結底是由于这些命題的真实性;及(2)在证明中所用的邏輯推論方法的正确性。两个問題都須由实践来解决。列宁說:“人的实践活动必須亿万次地使人的意識去重复各种不同的邏輯的格,以便这些格能够获得公理的意

^① 在苏联学者波茨瓦尔(Д. А. Бочвар)手中,邏輯的这种了解成为解决邏輯的和集合論的詳論的有效方法。

义。”^①

在另一个地方列宁写道：“为我们的实践所证实的是唯一的、最终的、客观的真理。”^② 诚然，实践的标准不是“僵硬的”，从列宁的观点看来，优点，而非缺点，正在于此，它保证科学无限发展的可能性。列宁说：“当然，在这里不要忘记，——实践标准实质上决不能完全地证实或驳倒人类的任何表象。这个标准也是这样的‘不确定’，以便不至于使人的知识变成‘绝对’，同时它又是这样的确定，以便同唯心主义和不可知论的一切变种进行无情的斗争。”^③

但是塔尔斯基的看法不是这样。读到本书某些地方，使人不由得产生一种印象：对于作者，理论和实践几乎是两极化的对立面，它们可以是互不相容的。如果有人想使我们相信：造永动机和魔桌布在“理论上”是很重要的，但是“可惜”，“实践上”这不能实现，因为它违反能量守恒定律，对于这样的人我们说些什么？——显然，我们反对这种提出违反物理规律的方案“理论”。

关于哥德尔(K. Gödel)的工作，作者写道，哥德尔的工作证明，要建立所有真的算术命题都可用以证明的“形式系统”是不可能的。诚然，塔尔斯基并没有由此做出什么明显的不可知论的结论来。他仅“限于”指出，用这一点就可以说明，为什么尽管完全性概念对于演绎理论有非常巨大的理论上的重要性，在实践上它对于演绎理论的构造只发生很小的影响。然而他没有谈到哥德尔所指的是什么样的“完全性”。这个概念有各种不同的意义，各个意义都不仅可以，而且事实上已经用上了，但是，他根本没有谈到这些不同的意义，尽管像已经指出来的，在这个领域中这个概念有一些有趣

① 列宁：《哲学笔记》，人民出版社1956年版，第175—176页。

② 《列宁全集》第14卷，人民出版社1957年版，第143页。

③ 《列宁全集》第14卷，人民出版社1957年版，第142—143页。

的結果。其實，事情的實質在於，這裡所指的是形式系統，形式系統只包括有有窮個公理和推理規則，每個公理和推理規則由確定的、能行地實現的運算所構成。如果對“完全的”形式系統一語我們同時還作這樣的理解：在其中所有用一定的詞項表示的命題，或者是被證明或者是被否證，那麼這意味着，問題是關於工具的構造，理論上（和實踐上！）與之等價的能完全代替人的思維（應用到所討論的理論的命題上）的機器的構造。自然，任何一個馬克思列寧主義者不會想到反對創造任何能運算的機器，特別是運算繁重和令人厭倦的計算題的機器。然而他不會想到，也不會認為在實踐上無法實現的幻想的機器在“理論上是重要的”。①

我們要指出，關於演繹理論的無矛盾性和完全性在理論上的重要性，和它們在各種情形中（或對它們的不同的處理辦法中）實際上實現的可能性，讀者在塔爾斯基的書中，無論如何，找不到充分的材料。這些問題的通俗說明實在也困難，而且每一項都要費不少的篇幅。我們只說一點，哥德爾定理並沒有使算術無矛盾性的一些證明，例如，我們在蘇聯數學家諾維科夫（П. С. Новиков）和干稱（Gentzen）的著作中見到的證明，失去意義；再者，甚至證明對於不論那一個普通邏輯的“形式系統”都不可解的問題的存在的一些最抽象的結果也已經使人能夠解決若干早已提出，然而迄今沒有解決的數學問題。② 自然，不言而喻，在這裡理論與實踐處於

① 如果在某個時候以前還能認為數學學科與其它科學不同是由于：用數學科學語言表達的真命題組成的整個無窮集合可以由確定的、預先列舉出來的而且容易檢驗的規則，即從有窮個、甚至不多的通常取作公理的規則得到，那麼現在我們知道，對於通常的算術，這些期望看起來是不可實現的。算術完全不應得到黑格爾給它的那種輕視，黑格爾以為在這門科學中思維能夠被自動機代替，這種意見馬克思和恩格斯從來沒有同意過。現在這一點得到了證明，尤其是從算術對於邏輯問題和數學方法論問題的应用是富有意義的這一事實上得到了證明。

② 這一類的一系列問題已為蘇聯數學家馬爾科夫（А. А. Марков）所解決。

統一之中，而不是與實踐對立的。

作者指出“未來的邏輯學像所有理論科學一樣，本質上依賴於人類政治的和社會的相互關係納入規範，”自然，他是正確的。

但是他以為，社會因素在職業學者的活動範圍之外，以及邏輯知識的傳佈可以自然而然地促進人們之間更好的相互了解，這一點他是錯誤的。美國反動集團使科學的進步服務於帝國主義侵略目的的企圖再一次証實，在科學周圍和在科學之中尖銳的政治和意識形態的鬥爭是不可避免的，在這個鬥爭中學者們不可能始終是旁觀者，而不無變成帝國主義和反動勢力的幫凶的危險。

雅諾夫斯卡婭

初版序言

根据許多門外汉的意見，数学今天已經成为一門死科学：在达到不寻常的高度发展水平以后，它已經在一种严格的完全性中僵化了。这是对情况的一种完全錯誤的看法。在科学研究领域中現在很少有象数学那样經歷着如此剧烈的发展阶段。而且，这种发展是极其多样化的：数学領域正在向一切可能的方向伸展，它在高、寬和深三方面都在成长着。它的高度在成长着，因为在数百年来（如果不是数千年以来的話）发展的旧的理論的土壤之上，新的問題不断地发生，而其所达到的結果越来越完全。它的寬度在成长着，因为它的方法渗透到其他各种科学部門中，而其研究的范围日益囊括着越来越广泛的現象界，并且越来越多的新的理論被包括在数学学科的龐大的范域之中。最后，它的深度在成长着，因为它的基础日益坚定地建立起来了，它的方法日益完备，它的原則日益巩固。

本书的目的就是要向那些对于現代数学有兴趣、而不曾实际参与它的工作的讀者們，至少在数学发展的第三个方面、即其在深度方面的成长提供一个最一般的观念。我的目的是要使讀者熟悉一种名为数理邏輯学科的最重要的概念，这門学科是为了把数学建立在更坚固、更深刻的基础上創造出来的；这一个学科，虽然它的存在只有短短的一个世紀，却已經达到了高度的完全性的水平，而且在我們的知識的总和中它今天所起的作用远远超越于其原定的范围。我的目的是要表明，邏輯的一些概念渗透到数学的整体中，它把所有的專門的数学概念了解为特殊事例，并把邏輯規律恒

应用于——自觉的或不自觉的——数学推理之中。最后，我试图提出构造数学理论的一些最重要的原则——这些原则也构成另外一种学科、数学方法论的主题——并指明怎样在实际上着手应用这些原则。

在这一本相当小的书的范围内，不假定读者有任何专门的数学知识或抽象的推理的任何专门的训练，要彻底地实现这全部计划是不容易的。在这一本书中，必须从头到尾力图把最大的可理解性和必要的简明性以及经常注意避免错误或从科学观点看来的粗糙的不精确性结合起来。其所用的语言必须是尽可能少地脱离日常生活的语言。必须放弃使用专门的逻辑符号，虽然这种符号是使我们把简明性和精确性结合起来，并使我们尽可能地排除含混和误解的可能性、从而在一切精细的思考中具有很大用处的极其宝贵的工具。必须把系统地处理的观念从一开始就放弃掉。在出现的很多问题之中只有少数能够详细地讨论，其他一些问题仅仅肤浅地接触到，还有一些问题则完全忽略过去了，并且我意识到，所讨论的题目选择不可避免地表现了或多或少的任意性。对于现代科学还没有采取任何确定的态度，而是提出了许多可能的、同样正确的解答的那些事例，不可能客观地把所有已知的见解都提出来。不得不作出支持某一确定见解的决定来。当作出这种决定的时候，我是十分小心的，不是首先使之符合于个人的兴趣，而是宁取一种尽可能简单的并且适合于普通表达方式的解法。

我并不幻想我已经成功地克服了这些以及其他一些困难。

序 言

本书是我的《論数理邏輯和演繹方法》(該书 1936 年最初用波兰文出版,又于 1937 年出版了确切的德文譯本——书名是:《数理邏輯和数学方法論导論》)一书部分修正了的和扩充了的版本。最初写这本书,是企图把它当作一本通俗的科学著作;其目的是向受过相当教育的普通讀者提供——用把科学的严格性和最大的可理解性結合起来的方式——集中于現代邏輯的强大的現代思潮的一个清楚的观点。这个思潮最初是从多少受到局限的巩固数学基础的任务发生的。可是,在現阶段它却具有远为广泛的目的。因为它試圖創造出可为人类知識的整体提供一种共同基础的統一的概念工具。此外,它有助于使演繹方法完全化和敏銳化,这种演繹方法在某些科学中被当作确立真理的唯一的允許的方法,而且,的确,它至少在一切智力活动的領域內,是从被公认的假設中推导出結論来的必不可少的補助的工具。

根据对波兰文版和德文版的反应,特別是某些評論者的建議,产生了一个想法,要使这个新的版本不仅仅是一本通俗的科学著作,而且也是大学里的邏輯和演繹科学方法論的初級課程可以作为藍本的教科书。由于在这个範圍內合适的初級教科书相当缺乏,这一嘗試就显得更为合适。

为了要进行这种嘗試,必須在书中作某些改变。

在前几版中,把某些最基本的問題和概念完全忽略过去或仅仅略微触及,这或是由于它們比較地具有專門性,或是为了避免一些具有爭論性的論点。像这样一些題目,例如:在邏輯的有系統的

发展中和在日常生活的語言中某些邏輯观念的用法之間的區別，证明語句演算的規律的一般方法，語詞与其名字之間的明确区別的可能性，全类和空类的概念，关系运算的基本观念，以及最后，作为各科学的一般科学的方法論概念。在这一版中，所有这些題目都討論到了（虽然所有这些題目并非同等詳尽地討論了的），因为我似乎觉得在現代邏輯的任何一本教科书中，不談这些題目就会造成一种根本的缺陷。因此，本书前面的几章，即概論部分或多或少地扩展了；特别是第II章，即專門討論語句演算的一章包含着很多新材料。对于这几章我又补充了許多新的练习，并且增加了历史的綫索的資料。

在前几版中，專門符号的应用是縮减到最低限度，而在这一版中我以为有必要使讀者熟悉邏輯符号的基本知識。但是，实际上这种符号的应用仍然受到很大限制，并且大部分限定在练习中。

在前几版中，为了說明一般的和抽象的思考而引出例子的主要領域是中学数学；因为我过去和現在都认为，基本数学、特别是代数，由于它的概念的簡單性及其推論方法的一致性，特別适合于例证邏輯的和方法論性质的各种基本現象。但是，在这一版，特别是在新补充的篇幅中，我经常从其他領域、特别是从日常生活中举出了一些例子。

除了这些增补以外，凡是学习者们較难以掌握的某些部分我也都重新写过了。

本书的基本面貌仍然沒有改变。初版的序言（其主要部分重新发表在前面）将会为讀者提供一个本书的一般性的观念。然而，也許有必要在这里很清楚地指出来讀者在这本书中所找不到的是一些什么东西。

第一，本书不包括邏輯的、系統的和严格的演繹的陈述；这样

一种陈述显然不在一本基本的教科书的范围之内。我原来企图在这一版中增加一章，名为作为演繹科学的邏輯，这一章——作为包含于第 VI 章中的一般方法論意見的一个說明——会为邏輯的某些基本部分的有系統的发展提供一个綱要。由于种种原因，这个企图未能实现；但是我希望包括在第 VI 章中的关于这个题目的几个新的练习在某种程度内将会补偿这个省略。

第二，除了两处很少的篇幅以外，这一本书沒有提供关于傳統的亚里士多德的邏輯的知識，并且不包含从之引伸出来的材料。但是，我相信这里給予傳統邏輯的篇幅是充分符合于它在現代科学中已經減低了的微小的作用的；而且我还相信我这个意見将会得到大多数現代邏輯学家的贊同。

最后，这一本书不涉及屬於所謂經驗科学的邏輯和方法論的任何問題。我必需說，我傾向于怀疑，作为与一般邏輯或“演繹科学的邏輯”相对立的任何特殊的“經驗科学的邏輯”究竟是否存在（至少，按照“邏輯”一詞在本书的用法——这就是說，它是一种学科的名称，这种学科分析一切科学所共有的一些概念的意义，并建立支配这些概念的一般規律）。但是这与其說是一个实际的問題，还不如說是一个術語的問題。总之，經驗科学的方法論构成科学研究的一个重要領域。当然，邏輯的知識在这种方法論的研究中，正如在任何其他学科中的情况一样，是寶貴的。可是，必須承认直到今天邏輯概念和方法在这个領域内并未得到任何特殊的或有成效的应用。并且至少这个情况可能不仅仅是現阶段方法論研究的一个后果。可能，这是由于下述情况所引起：为了对方法論作适当的論述，必須把經驗科学作为不仅仅是一种科学理論——就是說，作为按照某种規則所排列起来的确定的命題体系——而且是部分的由这样的命題和部分的由人类的活动所构成的复合物。

还必需补充說，与这种經驗科学本身的高度发展显著地相反，这些科学的方法論很难夸耀有相应的确定的成就——尽管已經作了很大的努力。甚至这个領域所涉及的初步概念澄清工作也还不曾进行得令人滿意。因此，經驗科学的方法論課程必定具有一种有別于邏輯課程的完全不同的性质，而且它必定是大部分限于对試驗性的探索和失敗的努力的估价和批評。由于这些和其他一些理由，对于把邏輯和經驗科学方法論的討論結合于同一个大学課程之中，我认为很少合理的根据。

关于本书及其用作大学教科书的安排方面有几点說明。

本书区分为两部分。第一部分是邏輯和演繹科学方法論的一般的导論；第二部分，借助于一个具体的例子，表明邏輯和方法論在数学理論的构造中的一种应用方式，并因而为消化和深化在第一部分中所获得的知識提供一个机会。每一章的后面都附有相当的练习。簡明的历史の綫索写在脚注中。

記有星标“*”的部分、甚至于整节，不論記在开始或末尾，都包含着較难的材料，或者假定讀者已熟悉包含着这样的材料的其他篇章；省略掉这些部分对于本书以下一些部分的理解不会有什么妨碍。这也适用于凡在号碼前記上一个星标的各个练习。

本书包含着足够全年課程用的材料。不过，它的編排也使它同样适用于半年的課程。如果把它用为哲学系的半年邏輯課的課本，我建議学习整个第一部分、包括較难的部分在內，而完全略去第二部分。如果把本书用为数学系的半年課程——例如，数学基础課——的課本，我建議学习本书的两个部分，而略去較难的部分。

无論如何，我願意強調小心地和詳尽地作好练习的重要性；因为它们不仅有助于对所討論的概念和原則的消化，并且也还触及

正文中没有机会讨论的许多问题。

如果本书对于逻辑知识的更广泛的传播有所贡献的话，我将感到很高兴。历史事件的进程已经使现代逻辑的一些最杰出的代表集中在这个国家（指美国——译者），并因而为逻辑思想的发展在这儿创造了特别有利的条件。自然，这些有利的条件可能很易于为其他更强有力的因素所抵消。显然，未来的逻辑学，象所有理论科学一样，本质上依赖于人类政治的和社会的相互关系纳入规范，因而依赖于一种超越于职业学者的控制的因素。我并不幻想逻辑思想的发展会对于人类关系的正常化过程特别起很重要的作用；但我相信，逻辑知识的广泛传播可以积极地加速这个过程。因为，一方面，由于使概念的意义在其自身范围内精确并一致起来，以及由于强调这样的精确性和一致性在任何其他领域中的必要性，逻辑就使凡是愿意很好地了解的人们都可能彼此很好地了解。并且，另一方面，由于思想工具的完全化与敏锐化，它使人们更有批判性——因而他们就不大容易为所有伪推论引入歧途，现在在世界各地他们不断有被这种伪推论引入歧途的危险。

我衷心感谢海尔麦(O. Helmer)博士的帮助，他把德文版译成了英文。我愿意对于霍夫斯塔德泰尔(A. Hofstadter)博士、克拉德尔(L. K. Krader)先生、纳盖(E. Nagel)教授、蒯恩(W. V. Quine)教授、怀特(M. G. White)先生、特别是麦克铿赛(J. C. C. McKinsey)博士和温纳(P. P. Wiener)博士表示最热诚的感谢，当我准备英文版时，他们慷慨地提出了意见并给予帮助。我也感激阿罗(K. J. Arrow)先生，他帮助阅读了校样。

塔尔斯基

1940年9月于哈佛大学

本书是英文第一版的影印本，不可能在其中作很大的改动。

不过,印錯的地方已經改正了,并在細节方面作了一些改进。对于讀者和評論者的有益的建議,我表示感謝,我特別感激秦 (Louise H. Chin) 女士,因为她帮助准备了这一版的出版。

塔尔斯基

1945 年 8 月于加利福尼亚大学,

貝克萊

目 录

俄譯本序言	v
初版序言	xviii
序言	xx

第一部分 邏輯的元素, 演繹方法

(I) 論變項的用法	1
§ 1. 常項與變項	1
§ 2. 包含變項的表达式——語句函項與指示函項	2
§ 3. 應用變項形成語句——全稱語句與存在語句	5
§ 4. 全稱量詞與存在量詞; 自由變項與約束變項	7
§ 5. 變項在數學中的重要性	11
練習	12
(II) 論語句演算	15
§ 6. 邏輯常項; 舊邏輯與新邏輯	15
§ 7. 語句演算; 語句的否定, 合取式與析取式	16
§ 8. 蘊函式或條件語句; 實質蘊函	20
§ 9. 蘊函式在數學中的應用	26
§ 10. 語句的等值式	29
§ 11. 定義的表述方式與定義的規則	30
§ 12. 語句演算的定律	33
§ 13. 語句演算的符號; 真值函項與真值表	35
§ 14. 語句演算定律在推理中的應用	42
§ 15. 推論的規則, 完全的證明	44
練習	47

(III) 同一理論	51
§ 16. 不屬於語句演算的邏輯概念; 同一概念	51
§ 17. 同一理論的基本定律	52
§ 18. 事物之間的同一与指示詞之間的同一; 引号的用法	55
§ 19. 算术与几何中的相等, 和它与邏輯同一的关系	58
§ 20. 数的量詞	61
练习	62
(IV) 类的理論	65
§ 21. 类与它的元素	65
§ 22. 类和包含一个自由变項的語句函項	66
§ 23. 全类与空类	70
§ 24. 类与类間的基本关系	71
§ 25. 类的运算	74
§ 26. 等数类, 一个类的基数, 有穷类与无穷类; 算术作为邏輯的 一个部分	76
练习	79
(V) 关系的理論	84
§ 27. 关系, 关系的前域与关系的后域; 关系与有两个自由变項 的語句函項	84
§ 28. 关系的运算	87
§ 29. 关系的一些性质	90
§ 30. 自反的, 对称的与傳遞的关系	92
§ 31. 序列关系; 其他关系的例子	94
§ 32. 一多关系或函項	96
§ 33. 一一关系或一一函項与一一对应	100
§ 34. 多項关系; 包含几个变項的函項与运算	103
§ 35. 邏輯对其他科学的重要性	105
练习	106

(VI) 論演繹方法	113
§36. 一个演繹的理論的基本組成部分——基本詞項与被定义 的詞項, 公理及定理	113
§37. 一种演繹的理論的模型和解釋	116
§38. 演繹法定律, 演繹科学的形式的特性	121
§39. 公理与基本詞項的選擇, 它們的独立性	125
§40. 定义与证明的形式化, 形式化的演繹理論	127
§41. 一个演繹理論的无矛盾性与完全性, 判定問題	129
§42. 演繹科学方法論的扩大的概念	133
练习	135

第二部分 邏輯和方法論在构造数学理論中的应用

(VII) 一个数学理論的构造: 数的次序的定律	147
§43. 构造中的理論的基本詞項, 关于数与数之間基本关系的 公理	147
§44. 基本关系的不自反律, 間接证明	149
§45. 基本关系的其它定理	151
§46. 数之間的其它关系	153
练习	157
(VIII) 一个数学理論的构造: 加法和减法的定律	159
§47. 关于加法的公理, 运算的一般性质, 群和交換群的概念	159
§48. 对于較多的被加数的交換律和結合律	161
§49. 加法的單調定律以及它們的逆定律	162
§50. 閉語句系統	166
§51. 單調定律的推論	168
§52. 减法的定义, 反运算	170
§53. 被定义者包含等号的定义	171
§54. 关于减法的定理	174

练习	175
(IX) 关于所构造的理論的方法論的討論	180
§ 55. 在原来的公理系統中消去多余的公理	180
§ 56. 化簡了的系統的公理的独立性	183
§ 57. 多余的基本詞項的消去和公理系統的繼續化簡; 一个有序 交換群的概念	185
§ 58. 公理系統的进一步化簡; 基本詞項系統的可能变换	187
§ 59. 所构造理論的无矛盾性問題	192
§ 60. 所构造理論的完全性证明	193
练习	195
(X) 所构造的理論的扩充. 实数算术的基础	200
§ 61. 实数算术的第一个公理系統	200
§ 62. 第一个公理系統的进一步描述, 它的方法論上的优点和教 学上的缺点	201
§ 63. 实数算术的第二个公理系統	203
§ 64. 第二个公理系統的进一步描述; 域的概念和有序域的 概念	205
§ 65. 两个公理系統的等价, 第二个系統的方法論上的缺点和教 学上的优点	207
练习	208
推荐的讀物	212
俄譯本編輯部注	217
俄譯本編輯部跋	241
索引	253
譯者后記	270

第一部分 邏輯的元素, 演繹方法

(I) 論變項的用法

§1. 常項與變項

每一種科學理論都是許多語句組成的系統。這些語句都是被斷定為真的, 可以叫做定律或斷定了的命題, 或者, 就簡單地叫做命題。在數學中, 這些語句都按照一些原則(在第 VI 章中將詳細討論這些原則)一個接着一個地排成確定的序列。在數學中, 這些語句的正確性都要建立起來。建立語句的正確性, 就叫做證明。被證明過的語句, 就是我們所謂定理。

在數學的定理與證明中出現的語詞和符號, 可以分為常項與變項。

例如在算術中, 我們常碰到這樣的語詞, 如“數”, “零”(“0”), “一”(“1”), “加”(“+”), ...^① 這些語詞都是常項。它們都有確定的意義, 而且在運用它們的過程中, 它們的意義一直不變。

在算術中, 我們習慣於將單個的英文的小寫字母 “a”, “b”, “c”, ..., “x”, “y”, “z” 用作變項。同常項相反, 變項本身都是沒有

① “算術” 這個詞, 我們是用來表示數學中研究數的一般性質、數與數間的關係與數的運算的那個部分。特別是中學所講的數學中, “算術” 也常常叫做“代數”。我們在這裡所以要用“算術” 這個語詞, 是因為在高等數學中, “代數” 是用來表示關於代數方程式的理論的。(在這些年來“代數” 這語詞又用成一個更寬的意義。它仍然是與“算術” 的意義不同。) “數” 這一語詞在這裡總是用來表示數學中的實數, 這就是說, 數是包括正整數、分數、有理數、無理數、正數與負數, 但卻不包括虛數或複數。

意义的。对于下面的問題：

零是否有某一种性质？

例如：零是一正整数嗎？

我們是可以給以肯定的或否定的回答的。我們所給的答案可以对，也可以錯。但是，無論如何，这些問題是有意义的。但是，相反的，下面关于 x 的問題：

x 是一正整数嗎？

便是一无意义的問題，我們也不能給一有意义的回答。

在有些初等数学的教科书中，特別是較老的初等数学的教科书中，我們有时碰到一些表述，好像我們可以給这些变項以独立的意义似的。因此，就有人說：“ x ”，“ y ”，…这些符号，也指示某些数或量；“ x ”，“ y ”，…虽然不是指示“常数”（“constant numbers”）（常数是由常項如“0”，“1”所指示的），但是它們却指示那些所謂“变数”（“variable numbers”）或“变量”（“variable quantities”）。这种說法是出于一种极大的誤解。“变数” x 不可能有任何确定的性质。例如，它不是正数，也不是負数，也不等于零。或者說， x 的性质是随着情形不同而变化的；有时它可以是正数，但有时又可以負数，有时又可以等于零。这样一种东西，在我們的现实世界中根本是找不着的。这样的东西如果存在于现实世界，那将会是違背我們思想的根本規律的 $\ominus$ 。因此，将符号区分为常項与变項，并不表示在数方面也可以区分为常数与变数。

§2. 包含变項的表达式——

語句函項与指示函項

由于变項本身是沒有意义的，所以，像

x 是一正整数

這樣的一句話，也就不是語句，雖然它們具有語句的文法形式。它們並沒有表示一個確定的斷定。因之，我們既不能肯定它們，也不能否定它們。我們用一個表示一個確定的數的常項來代換

x 是一正整數

中的“ x ”，只有這時，我們才能得到一個語句。例如我們用符號“1”去代換“ x ”，結果得到一真語句；若用“ $\frac{1}{2}$ ”去代換“ x ”，結果得到一假語句。這樣的一個表达式，在這個表达式中包含有變項，同時如果用常項去代換這些變項，這個表达式便變成了一個語句——這樣的一個表达式，我們將它叫做一個語句函項。這裡順便提到一下，數學家是不很喜歡用“語句函項”這個名詞的，因為他們把“函項”這詞用作另一個意義。他們較多地将“條件”(condition)這一語詞，用成我們所說的“函項”的意義。完全由數學符號(而不由日常語言中的語詞)所構成的語句函項與語句，例如，

$$x + y = 5,$$

數學家常常叫它做公式。在不會引起誤解的地方，我們有時將“語句函項”簡單地就叫做“語句”。

在一個語句函項中的變項的作用，可以很恰當地比做填充空白題目中的那些括弧所形成的空白。正如只有當空白被我們填上以後，題目才得到一個確定的內容一樣，一個語句函項只有當變項都被常項所代換以後，才變成一個語句。在一個語句函項中，用常項去代換變項——相同的變項用相同的常項去代換——其結果可以得出一個真語句；在這種情形下，我們就說，常項所表示的事物滿足這個特定的語句函項。例如 1, 2 與 $2\frac{1}{2}$ 這幾個數滿足下面這個語句函項：

$$x < 3,$$

但是，3, 4 與 $4\frac{1}{2}$ 這些數就不滿足這個語句函項。

除了語句函項，還有別的包含變項的表达式值得我們注意，那就是指示函項或摹狀函項。一個指示函項或摹狀函項是这样的表达式，如果將它所包含的變項換為常項，那麼，它就變成一個指示詞或摹狀詞，例如表达式：

$$2x+1$$

便是一個指示函項，因為，如果用一個任意的數值常項（即是說，表示一個數的常項，如“2”）去代換變項“ x ”，我們便得一指示詞（或摹狀詞），此指示詞表示一個數（如 5）。

在算術中所見的指示函項中，包括了所有的所謂代數式，這些代數式是由變項、數值常項與四種基本算術運算的符號所構成的，例如：

$$x-y, \quad \frac{x+1}{y+2}, \quad 2(x+y-z).$$

但是，另一方面，代數方程式，即是用“=”將兩個代數式聯起來而成的公式，卻是語句函項。在數學中，關於方程式有一套習用的術語。在方程式中出現的變項，叫做未知數。那些能滿足這方程式的數，叫做這方程式的根。例如，在方程式：

$$x^2+6=5x$$

中，變項“ x ”是未知數，而數 2, 3 是這方程式的根。

關於用於算術中的變項“ x ”，“ y ”，…，我們說它們代表那些表示數的指示詞，或者說，數是這些變項的值。這話的大意是說：如果用表示數的常項（而不是用表示數的運算的表达式，或表示數與數之間的关系的表达式，或在算術範圍之外的幾何圖形、動物、植物等等）^①去代換一個包含“ x ”，“ y ”…這些符號的語句函項中的這些符號，那麼，這個語句函項就變成語句。同樣的，用於幾何中的變項，是代表那些表示點與幾何圖形的指示詞。在算術中，我們

所碰見的指示函項，也可以說是代表關於數的指示詞。有時，我們簡單地說：“ x ”，“ y ”…這些符號，或由這些符號所構成的指示函項，是表示數或是數的指示詞。但是，這只是一種省略的說法^③。

§3. 應用變項形成語句—— 全稱語句與存在語句

除了用常項去代換變項以外，還有一個方法，可以使我們由一個語句函項得到一個語句。讓我們來研究下列公式：

$$x + y = y + x$$

這是一個包含兩個變項“ x ”，“ y ”的語句函項，任何兩個任意數都可以滿足這個方程式。如果我們用任何兩個數值常項去代換“ x ”、“ y ”，我們總是得到一個真的公式。我們用下面這句簡單的話表示上面所說的情形：

對於任何數 x 與 y ， $x + y = y + x$ 。

這已經不是一個語句函項，而是一個語句了，而且還是一個真語句了；它是算術中最基本的定律之一，即所謂加法的交換律。數學中的那些最重要的定理都同樣是這樣表示的，即一切所謂全稱語句，或所謂具有普遍性質的語句，這些語句斷定某個範疇中的任意事物（例如，在算術這個範疇中，任意的數）都具有一種如此如此的性質。我們必須注意的是：在表示全稱語句時，“對於任何事物（或數） $x, y, \dots$ ”這樣的短語常被省略掉，而是需要我們在思想中加進去的。例如，算術的加法交換律，便只表示為下面的簡單形式：

$$x + y = y + x$$

這種省略的形式，已成了大家的習慣用法，我們在以後的討論中，一般地也要採取這種用法。

讓我們研究下面這個語句函項：

$$x > y + 1$$

并不是任何两个数都能滿足这个公式。例如，假設我們用“3”代換“ x ”，用“4”代換“ y ”，我們便得到

$$3 > 4 + 1$$

这是一个假語句。因此，如果有人說：

对于任何数 x 与 y ， $x > y + 1$ ，

那么，虽然他說了一个假語句，然而却无疑是一个有意义的語句。但是，另一方面，也有許多对的数滿足上面这个語句函項。例如，如果以“4”与“2”分別掉換“ x ”与“ y ”，便得到

$$4 > 2 + 1$$

这个真的公式。

上述这种情形——某些两个数能滿足 $x > y + 1$ 这个公式——，可以簡單地表示如下：

有数 x 与 y ， $x > y + 1$

或者用一更常采用的形式：

有数 x 与 y ，使得 $x > y + 1$ 。

上面这些表达式都是真語句，它們就是存在語句或具有存在性质的語句的例子。这种語句表示具有某某种性质的事物(如数)的存在。

应用上述方法，我們可以从任何語句函項得出語句，但是，所得出的語句是真或是假，却要根据这語句函項的内容来决定。現在用下面的例子作进一步的說明。

$$x = x + 1$$

这个公式是任何数都不能滿足的。因而，不論我們在它前面加上“对于任一数 x ”，或加上“有一数 x ”，結果所得出的語句，总是假的。

和全称語句与存在語句相对,我們將不包含任何變項的語句,例如,

$$3+2=2+3$$

叫做单称語句。我們將語句分为三类——全称語句、存在語句与单称語句——这个分类并不已經穷尽一切可能,因为有很多語句不能分屬於上面三类中的任何一类。例如,像这样的語句:

对于任何数 x 与 y , 有一个数 z , 使得

$$x=y+z^{(4)}$$

这样的語句,我們叫它做条件的存在語句(以区別于前面所讲的存在語句。前面所讲的存在語句,也可以叫做絕對的存在語句)。这样的語句断定有具有某性质的数的存在,但是却根据于一个条件,即:有别的数 (x, y) 的存在。

§4. 全称量詞与存在量詞; 自由變項与約束變項

下列这些短語:

对于任何 $x, y, \dots$

与

有 $x, y, \dots$, 使得

都叫做量詞。前者叫做全称量詞, 后者叫做存在量詞。量詞也可以了解为运算子。但是,有些作为运算子的表达式,却不是量詞。在前一节我們已經試图說明两种量詞的意义。为了表明它們的重要意义,应当着重指出:只有明显地或隐含地应用运算子,才能使一个包含有變項的表达式变为一个語句,那就是說,变为一个确定的命題。在数学定理的表述中,如果没有相应的运算子,變項的应用是不可能的⁽⁵⁾。

在日常語言中, 虽然可以用變項, 但是, 我們却不习惯于用變項。由于同一的理由, 在日常語言中也不用量詞。然而在日常語言中, 也有一些語詞, 这些語詞在一般用法上与量詞有很密切的联系, 例如, “每一”、“所有”、“某一”、“某些”。如果我們注意到:

所有的人都是会死的

或

有些人是聪明的

这两个日常語言中的語句分別地与下面这两个用量詞的語句:

对于任何 x , 如果 x 是人, 那么 x 是会死的

与

有一 x , 使得 x 既是人又是聪明的

具有差不多相同的意义, 那末, 日常語言中的“每一”、“所有”…这些語詞与量詞之間的联系, 就很容易看出了。

为了簡便起見, 量詞常用一些符号来代替。

我們用

A
 $x, y, \dots$

来代替

对于任何事物(或数) $x, y, \dots$ 。

我們用

E
 $x, y, \dots$

来代替

有事物(或数) $x, y, \dots$, 使得:

按照这規定, 例如, 前一节末我們所举的那个条件的存在語句, 就可以用下面的形式来表示:

(I) $A[E(x=y+z)]$
 x, y, z

(用“A”代替“對於任何數 x, y ”，用“E”代替“有一數 z ”，並將在量詞後的語句函項放在括弧內。)

如果我們在一个包含變項“ x ”，“ y ”，“ z ”…的語句函項前面，加上一個或幾個運算子，而這一個或幾個運算子，又包含了所有這些變項，那麼，這個語句函項便自動地變成了一個語句。但是，如果在這一個或幾個運算子中，沒有包含所有的變項，那麼，這個語句函項，還仍然是一個語句函項，而沒有變成一個語句。例如，將下面

對於任何數 x, y, z ,

有數 x, y, z , 使得,

對於任何數 x 與 y , 有一數 z , 使得,

以及等等這樣的短語中的任一個短語加在

$$x = y + z$$

的前面，那麼，就得到一個語句了。但是，如果我們在 $x = y + z$ 前面僅僅加上：

有一數 z , 使得：或 E

那麼，我們還並不能得到一語句；而我們所得出的那個表达式，即：

$$(II) \quad E_z(x = y + z)$$

無疑是一個語句函項，

因為如果我們用兩個常項去替換上面公式中的 x, y ，而 z 仍維持原樣不動，或者，在上面公式前面加上

對於任何 x 與 y , 或 A,

那麼，上面那個公式就變成了一個語句。

由此，我們知道，在一个語句函項中所可能出現的變項，可以分別成兩種。第一種變項——可以叫做自由變項或真變項——它在这个語句函項中的出現是肯定這個表达式是一個語句函項而不是一個語句的決定性因素。為了要使這個語句函項變成語句，就

必須將這些自由變項換為常項，或在這個語句函項前面，加上包含這些自由變項的運算子。其餘的變項，叫做約束變項或假變項，約束變項在一個語句函項轉變為一個語句中是不變的。例如，在上面(II)那個語句函項中，“ x ”“ y ”是自由變項；“ z ”出現兩次，是一個約束變項。又例如，上面的(I)卻是一個語句，它包含的變項，都是約束變項。

*在某一語句函項中出現的變項，究竟是自由變項還是約束變項，這完全決定於這個語句函項的結構，即是說，完全決定於運算子的出現與出現的位置。這點由一個具體例子來看，最容易明白。讓我們來研究下面這個語句函項：

(III) 對於任何數 x ，如果 $x=0$ 或 $y \neq 0$ ，那麼，有一個數 z ，使得 $x=y \cdot z$ 。

在這個函項前面，有一個包含變項“ x ”的全稱量詞，因此，在這個函項中出現了三次的“ x ”，在它出現的任何位置上，都是一個約束變項。第一次出現的“ x ”是在全稱量詞內，而成為量詞的組成部分。第二、第三次出現的“ x ”，都是被量項約束着。“ z ”的情形也相類似。因為，雖然(III)的第一個量詞中沒有包含“ z ”這個變項，然而，我們可以找出一個語句函項，這個語句函項是(III)的一個組成部分，同時，前面又有一個包含“ z ”的存在量詞。即是：

(IV) 有一個數 z ，使得 $x=y \cdot z$ 。

(IV)是(III)的一個部分，而“ z ”在(III)出現時，都出現在(IV)這個部分中。因為這個道理，我們說，“ z ”在(III)中的任何地方，都是作為一個約束變項出現。“ z ”在(III)中第一次出現，是在存在量詞中，是存在量詞的一個部分；“ z ”第二次出現，是被存在量詞約束着。

在(III)中還出現一個變項“ y ”，而(III)中卻沒有包含“ y ”的量詞，因而，“ y ”在(III)中是作為一個自由變項出現兩次。

量詞能約束變項(這就是說,量詞能將在它后面的語句函項中的自由變項變成約束變項),構成量詞的一個最本質的性質。我們知道,有許多別的表达式也有與量詞同樣的性質。它們中的某一些,我們將在 §20 與 §22 中講到;其它一些,例如復分符號,在高等數學中起着重要的作用。“運算子”是一個一般的名詞,用來表示一切具有這類性質的表达式。*

§5. 變項在數學中的重要性

由 §3 里我們已知道,變項在表示數學定理方面是起着重要的作用。然而,並不因此就可得出:不用變項在原則上便不可能表示數學定理。但是,在實際的數學工作中,不用變項,就很難做到。因為,如果不用變項,就是比較簡單的語句,都得用一個複雜而難懂的形式。我們用下面這個算術定理來作說明:

對於任何數 x 與 y , $x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$

這個數學定理,如果不用變項,便只得這樣說:

任何兩數的三次冪的差,等於此兩數之差乘下列三項之和:(1)第一數的二次冪,(2)第一第二數之和,(3)第二數之二次冪。

從思維經濟的觀點來看,在數學的证明方面,變項更是重要^⑤。讀者如果嘗試一下,將本書以後所講到的任何证明中的變項去掉,他便会相信我的話了。還必須指出,在本書下文中所可能遇到的证明,比高等數學各個領域中的一般证明,要簡單得多。要想作出高等數學中的证明而不借助於變項,將會遭遇非常大的困難。還應當指出:由於變項的引用,我們才發展了一種如方程式方法這樣非常有效的解決數學問題的方法。可以毫不夸大地說,變項的發明,是數學史上的一個轉捩點。由於用變項,人類獲得了一個

工具, 这个工具, 为数学科学的巨大发展与其邏輯基础的巩固鋪平了道路。^①

练 习

1. 在下列表达式中, 哪些是語句函項? 哪些是指示函項?

(a) x 是能被 3 除尽的;

(b) 数 x 与 2 之和;

(c) $y^2 - z^2$;

(d) $y^2 = z^2$;

(e) $x + 2 < y + 3$;

(f) $(x + 3) - (y + 5)$;

(g) x 与 z 的母亲;

(h) x 是 z 的母亲。

2. 从几何学的範圍內, 举出几个語句函項与指示函項的例子。

3. 算术中只包含一个变項 (但这个变項在一特定語句函項中可以出現于几个不同的地方) 的語句函項, 可以分成三类: (i) 任何数都滿足它的函項, (ii) 任何数都不滿足它的函項, (iii) 有些数滿足它, 但其他的数却不滿足它的函項。指出下面的語句函項屬於哪一类:

(a) $x + 2 = 5 + x$;

(b), $x^2 = 49$;

(c) $(y + 2) \cdot (y - 2) < y^2$;

^① 在古代, 希腊数学家与邏輯家就已經应用了变項, 虽然只是在特殊的情况与很少的場合应用了它。在十七世紀初年, 主要由于法国数学家維他的影响, 人們才开始系統地、一致地应用变項, 将变項应用到数学的研究上去。然而, 直到十九世紀末年, 由于量詞这个概念的引用, 变項在科学語言方面, 特別在数学理論的表述方面的功用, 才被人們完全認識, 这主要应归功于杰出的美国邏輯家与哲学家皮尔斯。

$$(d) y+24 > 36;$$

$$(e) z=0 \text{ 或 } z < 0 \text{ 或 } z > 0;$$

$$(f) z+24 > z+36.$$

4. 从算术範圍內, 举出关于全称定理、絕對的存在定理与条件的存在定理的例子。

5. 在語句函項

$$x > y$$

前面, 加上包含“ x ”与“ y ”的量詞, 便可以由此得出各种語句, 如:

对于任何数 x 与 y , $x > y$;

对于任何数 x , 有一数 y , 使得: $x > y$;

有一数 y , 使得: 对于任何数 x , $x > y$ 。

一共有六个可能情形, 請一一表示出来, 并指出它們中間哪些是真的。

6. 像第 5 題一样, 在語句函項

$$x+y^2 > 1$$

与

x 是 y 的父亲

前面, 加上各种量詞, 并指出哪些是真的 (假定后一語句函項中的“ x ”与“ y ”代表人名)。

7. 写出一个与下列語句有相同意义的日常語句, 并且不包含量詞或变項:

对于任何 x , 如果 x 是狗, 那么, x 有一个很好的嗅觉。

8. 用量詞与变項作出一个語句, 这个語句与下一語句有相同的意义:

有些蛇是有毒的。

9. 在下列各表达式中, 分別哪些是自由变項, 哪些是約束变

項：

(a) x 是能被 y 除尽的；

(b) 对于任何 x , $x - y = x + (-y)$;

(c) 如果 $x < y$, 那么, 有一数 z , 使得:

$$x < y \text{ 与 } y < z;$$

(d) 对于任何数 y , 如果 $y > 0$, 那么, 有一数 z , 使得: $x = y \cdot z$;

(e) 如果 $x = y^2$ 与 $y > 0$, 那么, 对于任何数 z , $x > -z^2$;

(f) 如果有一数 y , 使得 $x > y^2$, 那么, 对于任何数 z , $x > -z^2$.

再用 §4 里的符号代换上面表达式中的量詞。

*10. 如果将在 9 題 (e) 那个語句函項中两次出現的“ z ”換为“ y ”, 我們便得到一个表达式, 在这个表达式中的某个地位, “ y ”是作为自由变項出現, 在另一个地位, “ y ”又作为約束变項出現。請指出“ y ”在哪个地位是自由变項, 在哪个地位又是約束变項, 理由为何?

(在一表达式中, 同一个变項在有些地位上是約束变項, 在另一些地位上又是自由变項, 运算起来便感觉困难; 有些邏輯家有見于此, 便避免用这样的表达式, 并且不将这种表达式看作語句函項。)

*11. 試作一个比較普遍的說明: 在甚么条件下, 一个变項在一給出的語句函項中的某一地位作为自由变項或約束变項而出現④。

12. 指出哪些数滿足下面的語句函項:

$$\text{有一数 } y, \text{ 使得 } x = y^2,$$

哪些数滿足下面的語句函項:

$$\text{有一数 } y, \text{ 使得 } x \cdot y = 1.$$

(II) 論語句演算

§6. 邏輯常項；旧邏輯与新邏輯

每一門科学中所需要应用的常項，可以分为两种。第一种常項，就是某門科学所特有的語詞。例如，算术中指示个别的数、数的类、数与数間的关系或数的运算等等的那些語詞，都是屬於第一种常項。在 §1 中作为例子的那些常項，便是屬於第一种常項。另一方面，还有一些在絕大多數的算术語句中都出現的，具有非常普遍的性质的語詞，这些語詞我們無論在日常語言中以及在一切科学領域中都会遇到它們，它們是传达人类思想与在任何領域中进行推論所不可缺少的工具，例如，“不”，“与”，“或”，“是”，“每一”，“有些”……；这些語詞都屬於第二种常項。于是，就有一門被认为是各門科学的基础的學問，即是邏輯。邏輯這門學問是要建立第二种語詞的确切意义，与关于这些語詞的最普遍的定律。

邏輯很早就發展成一門独立的科学，甚至于比算术和几何都要早。經過一个几乎是完全停滯的长时期，這門學問直到最近才开始一个巨大的发展；在这个发展过程中，它經歷了一种彻底的轉变而成为一門具有与数学类似的性质的學問。这种轉变后的新邏輯，就是所謂数理邏輯，或演繹邏輯，或符号邏輯；有时我們也叫它做邏輯斯蒂^① (logistic)。新邏輯在很多方面都超过旧邏輯，这不仅是由于新邏輯的基础的結实与所用的方法的完善，而且主要地是由于新邏輯所建立起来的丰富的概念与定理。基本上說，旧的傳統邏輯只是新邏輯中的一个片断部分，而且这个部分，从其他科学，特别是从数学方面的要求看，是完全不重要的。因此，由于本书的目的所在，在本书的整个篇幅中将很少有机会来討論傳統邏

輯方面的問題。^①

§7. 語句演算；語句的否定，合取式與析取式

在具有邏輯性質的語詞中，有一小組重要的語詞，包括“不”、“而且”、“或”、“如果…，那麼…”這樣的語詞。在日常語言中，我們就很熟悉這些語詞，我們應用這些語詞從簡單語句構成複雜語句。在文法上，它們被歸屬於所謂語句聯詞。僅僅就這一個文法的性質說，這些語詞的出現並不體現出一門專門科學的特殊性質。建立這些語詞的意義與用法，是邏輯的一個最初步的，也是最基本的部分的工作——這個部分就是語句演算，有時也叫做命題演算，或不太恰當地，叫做演繹理論。^②

現在我們要討論語句演算中的那些最重要的語詞的意義^③。

借助於“不”這個字，我們可以形成任何語句的否定式。兩個語句如果其中的一個語句是另一個語句的否定，這兩個語句就叫做互相矛盾的語句。在語句演算中，“不”字是放在整個語句前面的，但在日常語言中，“不”字通常是放在動詞前面的。在英文的日常

① 邏輯是紀元前四世紀希臘大思想家亞里士多德(Aristotle)創立的；亞里士多德的邏輯著作，都收集在《工具論》(Organon)一書中。但是，數理邏輯的創立人，應該被認為是十七世紀的德國哲學家與大數學家萊布尼茲。然而萊布尼茲的邏輯著作並沒有能對於邏輯研究的進一步發展產生影響，有一個時期萊布尼茲的邏輯著作甚至湮沒無聞。數理邏輯的繼續發展，只是在十九世紀中葉，即英國數學家布爾的邏輯系統發表的時候才開始，他的主要著作是：《思想規律的研究》(An Investigation of the Laws of Thought, 1854年倫敦初版)。到現在止，懷特海(A. N. Whitehead)與羅素的劃時代的著作《數學原理》(Principia Mathematica, 1910—1913 劍橋初版)仍是新邏輯學的最完善的表現。

② 歷史上第一個語句演算系統，出現於德國邏輯家弗萊格(G. Frege, 1848—1925)氏的著作：《概念符號系統》(Begriffsschrift)中。弗萊格無疑地是十九世紀最偉大的邏輯學家。當代杰出的波蘭邏輯家與邏輯史家路加西維契(J. Lukasiewicz)，又成功地給予語句演算一個特別簡單、精確的形式，引起了對語句演算的廣泛研究。

語言中,如果需要将“不”这个語詞放在一个語句的前面,就需要用“这并不是:”(it is not the case that)这个短語来代替“不”这个語詞。例如:

1 是一正整数。

这个語句的否定就是:

1 不是一正整数,

或

这并不是: 1 是一正整数。

在任何时候,我們說出一个語句的否定,我們的意思是表示:这个語句是假的。如果这个語句事实上是假的,那么,这个語句的否定便是真的;如果这語句事实上是真的,那么,这語句的否定便是假的。

用“而且”这个詞将两个或两个以上的語句联合起来,結果便形成了一个合取式或邏輯积;被联合在合取式中的那些語句,叫做合取式的元素(member),或叫做邏輯积的因子(factor)。例如: 如果将下面两个語句

2 是一正整数

与

$2 < 3$

这样联合起来,便得出下面这个合取式:

2 是一正整数,而且 $2 < 3$ 。

断定两个語句所构成的合取式,就等于断定这两个語句都是真的。如果事实上这两个語句都是真的,那么,这个合取式便是真的;但是,只要这两語句中至少有一个語句是假的,那么,这个合取式便是假的。

用“或”字将两个或两个以上的語句联合起来,便得出一个这些語句的析取式,后者也叫做邏輯和。构成析取式的那些語句,叫

做析取式的元素或叫做邏輯和的被加項 (summand)。“或”字在日常語言中至少有两个不同的意义，一个是可兼的“或”，另一个是不可兼的“或”。如果“或”字用成可兼的意义，那么，两个語句的析取式，只表示这两个語句中至少有一个語句真，而对于这两个語句是否能同真，沒有任何表示。如果“或”用成另一个意义，即用成不可兼的意义，那么，两个語句的析取式是断定：这两个語句中之一是真的，而另一个是假的。假定我們在书店里看到一个通告：

教师或大学学生可以享受特別的减价优待。

这里“或”这个語詞无疑地是用成第一个意义，因为这个通告并不想表示：是教师同时又是大学学生的人不能享受减价优待。另一方面，如果一个小孩子要求上午带他去散步，下午带他去看戏，而我們这样答复他：

不，我們去散步或者我們去看戏。

这里的“或”这个語詞，很显然是用成第二个意义，因為我們只想答应他的两个請求中的一个。在邏輯与数学中，“或”这个語詞总是用成第一个意义，即是可兼的意义。因之一个两个語句的析取式，如果两个語句或至少其中一个語句是真的，这个析取式就被认为是真的。如果两个語句都是假的，那么，这个析取式才是假的。例如，虽然我們知道有些数既是正数又小于 3，我們仍然可以断定：

每一个数都是正数或小于 3。

为了避免誤解，在日常語言和在科学語言中一样，我們最好将“或”这个語詞用成第一个意义，而当我們想要表示第二个意义时，使用“或者…或者”这个方式，这样是会有許多便利的。

*即使我們將“或”这个語詞限制到可兼的意义，日常語言中的“或”的用法与邏輯中的“或”的用法还有很大的差別。在日常語言中，用“或”这个語詞联合起来的两个語句，总在形式上与内容上有

某种联系。（“与”这个語詞的用法也是如此，不过程度較輕罢了。）这种联系的性质究竟如何，是并不很清楚的。对于这种联系要作一个詳細的分析与說明，将会碰到相当大的困难。无论如何，不熟悉現代邏輯語言的人，很难认为下面这样的語句

$2 \cdot 2 = 5$ 或紐約是一大城

是一个有意义的表达式，当然更不会认为它是一句真語句。在日常的英文語言中，“或”字的用法是受了一些心理因素的影响的。在通常情形下，只有当我们相信在两語句中有一个是真的，而不知道哪一个是真的时候，我們才断定这两个語句的析取式。假如我們在正常的光綫之下看一片草地，我們就不会說：这片草地是綠色的或是藍色的。因为我們能够說一句更簡單也更确定的話，即是：这草地是綠色的。有时甚至我們认为：一个人如果說了一个析取式，这就表示这个人承认他不知道析取式中哪一个元素是真的。假如我們后来发觉，这个人說那个析取式时明知道其中一个——特别是如果他明知道哪一个——元素是假的，那么，即使这个析取式中的其他元素是真的，我們仍然会认为这个析取式是假的。讓我們設想，我們問一个朋友：你甚么时候离开？他說：今天或者明天或者后天。假使我們以后发觉，他在說這句話时，就已經决定了要当天离开，我們大半会认为，他是故意欺弄我們，他說了一句謊話。

現代邏輯的創立者們在把“或”这个語詞引入他們的研究領域中时，（也許是不自觉地）要求簡化“或”的意义，使它变得更清楚些，并且独立于一切心理因素，尤其是独立于認識的存在或不存在。結果，他們便將“或”的用法放寬了，即使两个語句在形式上或內容上沒有联系，他們认为，这两个語句所构成的析取式还是一个有意义的整体。因此，近代邏輯家使一个析取式的真假——和一个否定式或合取式的真假一样——仅仅决定于这个析取式所包含

的元素的真假。因此，我們如果从現代邏輯所給予“或”的意义来看，那末，下列表达式：

$2 \cdot 2 = 5$ 或 紐約是一个大城市

就是一个有意义的語句而且是一个真的語句，因为这个析取式的第二个元素确是真的。同样，假如我們的朋友在答复他何时离开这个问题时，他所用的“或”字也是严格的邏輯意义下的“或”，那么，我們必須认为他的答复是真的，不管我們对他的动机有如何想法。*

§8. 蘊函式或条件語句：实质蘊函

如果我們用“如果…，那么，”将两个語句联接起来，我們就得到一个复合語句，这个复合語句，就叫做一个蘊函式或条件語句。“如果”所引导的那个附屬子句，叫做前件 (antecedent)， “那末”所引导的那个主要子句，叫做后件 (consequent)。我們断定一个蘊函式时，我們就是断定：前件真而后件假这样情况是沒有的。因之，在下列三个情形的任一情形下：

(1) 前件与后件都真，

(2) 前件假而后件真，

(3) 前件与后件都假，

一个蘊函式都是真的。只有在第四个可能的情形下，即前件真而后件假，整个的蘊函式才是假的。由此可以得出：如果一个人承认一个蘊函式是真的，并且又承认这个蘊函式的前件是真的，那么，他就必得承认这个蘊函式的后件是真的；同时，如果一个人承认一个蘊函式是真的，并且又否定这个蘊函式的后件，认为它是假的，那么，他就必得否定这个蘊函式的前件，认为它是假的。

*同析取式的情形一样，邏輯中的蘊函式的用法与日常語言中

的蘊函式的用法有相当大的差別。在日常語言中，只有当两个語句有某种形式与內容上的联系时，我們才用“如果…那么…”把这两个語句連接起来。我們很难一般地說明这究竟是一种什么联系，只在有些情形下，这种联系的性质才比較明显。这种联系常常和某种确信結合在一起，这个确信就是：后件必然可以由前件而推出，也就是說，如果我們假定前件是真，我們就会不得不假定后件也是真（甚至可能确信，我們可以根据某种普遍定律从前件中把后件推出来，虽然这个普遍定律我們不一定能明确地說得出来）。同样，在这里也表現出一个外加的心理的因素；通常的情形是：只有当我們对前件和后件是否真沒有确切的認識时，我們才作出或断定一个蘊函式；否則，用一个蘊函式似乎就很不自然，并且会引起人怀疑到它的意义和真实性。

下面的例子可以作为一个說明。讓我們来考虑下面这个物理定律：

一切金屬都是有延展性的。

讓我們用包含变項的蘊函式将这个定律表示如下：

如果 x 是金屬，那么， x 就是有延展性的。

我們如果相信这个普遍規律是真的，我們也就相信这普遍定律的特殊例证也是真的，即是說，也就相信，用表示任何物质如铁、粘土、木头的語詞去代換 x 而得出的蘊函式也是真的。用铁、粘土、木头代換上面那个普遍規律中的 x ，便得到下面的語句：

如果铁是金屬，那么，铁是有延展性的，

如果粘土是金屬，那么，粘土是有延展性的，

如果木头是金屬，那么，木头是有延展性的。

而事实上也的确是，这样代換所得的語句，都滿足了一个真的蘊函式所要求的条件，即：沒有前件真而后件假的情形。此外，我們还

可以注意到：这些語句中的前件与后件之間有一种密切的联系，这个联系的形式的表现就是前件的主詞与后件的主詞是同一的。并且我們还确信：如果假定这些蘊函式中的任何一个蘊函式的前件，例如，铁是金屬，是真的，我們就可从这个前件推出它的后件，例如，铁是有延展性的，因为我們可以訴諸于这样一个普遍的規律即一切金屬都是有延展性的。

但是，虽然这样，上面所談的語句中有几个語句，从日常語言的观点看来，似乎是不自然并且可疑的。对于上面那个普遍的蘊函式，或对于用某些語詞，（这些語詞所表示的东西是金屬与否，或有延展性与否，我們根本不知道，）去代換那个普遍蘊函式中的“ x ”而得出的語句，我們不会觉得它不自然或可疑。但是，如果我們用“铁”去代換“ x ”，我們得出一个語句，它的前件与后件我們都知道是真的；在这种情形下，我們就不会去用一个蘊函式，而喜欢用下面这个表达式：

因为铁是金屬，所以铁是有延展性的。

同样，如果用“粘土”去代換“ x ”，我們得出一个前件假而后件真的蘊函式；在这种情形下，我們也不会去用一个蘊函式，而会说：

虽然粘土不是金屬，它却是有延展性的。

最后，如果我們用“木头”去代換“ x ”，結果得出一个前件与后件都假的蘊函式；在这种情形下，如果我們还想保持“如果…那么…”这个蘊函式的形式的話，我們就会要改变動詞的語气，說成：

如果木头竟是金屬，那么木头将該是有延展性的了。

但是，由于考虑到科学語言的种种要求，邏輯学家对于“如果…那么…”这个短語采取了和他們对“或”这个語詞所采取的同一态度。他們决定簡化并且明确“如果…那么…”的意义，并使“如果…那么…”摆脱种种心理的因素。为此，他們放寬了“如果…

那么……”的用法；即使一个蕴涵式的前件与后件没有任何联系，他們仍把这个蕴涵式看作是一个有意义的語句；同时，他們使一个蕴涵式的真假完全决定于它的前件与后件的真假。这种蕴涵式，就是当代邏輯中所謂的实质蕴涵 (implication in material meaning 或 material implication)。实质蕴涵不同于形式蕴涵 (implication in formal meaning 或 formal implication)；保证形式蕴涵有意义与真实的必要条件，是前件与后件之間有某种形式上的联系。形式蕴涵这个概念并不十分清楚；但是，无论如何，形式蕴涵这个概念要比实质蕴涵这个概念狭窄；也就是說，任何一个有意义的而且真的形式蕴涵必然同时是一个有意义的而且真的实质蕴涵，但是，任何一个有意义的而且真的实质蕴涵不必同时是一个有意义的而且真的形式蕴涵。

为了要說明上面的道理，我們現在来研究下列四个語句：

如果 $2 \cdot 2 = 4$ ，那么，紐約是一大城市。

如果 $2 \cdot 2 = 5$ ，那么，紐約是一大城市。

如果 $2 \cdot 2 = 4$ ，那么，紐約是一小城市。

如果 $2 \cdot 2 = 5$ ，那么，紐約是一小城市。

在日常語言中，这些語句很难被认为是**有意义的**，更不会认为是**真的語句**。但是，另一方面，从数学与邏輯的观点看，这些語句却都是有意义的語句，并且除了第三句是假的以外，其余都是真的語句。当然，我們这样說并不等于說上面这样一些語句从任何观点看有什么特別重要的意义，或我們会去用它們来作我們論证的前提。

把上面所說明的日常語言与邏輯語言之間的差別看作是**絕對的**，并且把上面所描述的我們在日常語言中应用“如果……那么……”时的种种常規看作**絕无例外**，这也是一种**錯誤**。事实上，日常語言中“如果……那么……”的用法是相当灵活的。如果我們仔細考查一

下，我們就會發現在許多情形下“如果…那麼…”的用法，同我們上面所說的常規並不一致。讓我們設想我們的一個朋友碰到一個非常困難的問題，而且我們相信，他決不能解決這個問題，於是，我們便會用开玩笑的口氣說：

如果你解決了這個問題，我就吃掉我的帽子。

這句話的用意是很明顯的。這裡我們斷定了一個蘊函式，它的後件無疑地是假的；因此，既然我們斷定整個蘊函式為真，我們也就同時斷定前件是假。即是說，我們用這個蘊函式來表示一種確信：我們的朋友將不能解決他所面臨的困難問題。很清楚，這裡這個蘊函式的前件與後件並沒有任何聯繫。因之，這是一個實質蘊函的典型例子而不是一個形式蘊函。

關於“如果…那麼…”在日常語言中與在數理邏輯中用法的差別，曾經引起冗長的甚至動情感的辯論。附帶說一句，職業邏輯家在這個辯論中，卻只表演了一個次要的角色^①。（很奇怪，關於“或”的用法的分歧卻比較很少為人注意。）有人提出意見說，由於引用了實質蘊函，邏輯家得出了許多諄論，甚至得出了許多純粹的胡說。因此，就有一種改造邏輯的呼聲，要求使邏輯與日常語言關於蘊函式的用法能有更大的接近。

我們很難認為上面這種對近代邏輯中的蘊函式的批評，有什麼充分的根據。在日常語言中，沒有一個語詞是有嚴格確定的意

^① 這是有趣的事情，關於蘊函的討論，在古代就已開始。希臘哲學家費羅（Philo of Megara，紀元前四世紀）在邏輯史上大概是第一個傳播了實質蘊函的用法的人。這個主張和他的老師克朗納斯（Diodorus Cronus）是對立的；克朗納斯主張把蘊函用成較狹的意義，後者與我們前面所講的形式蘊函比較接近。稍後，到了紀元前三世紀，——可能是受了費羅的影響，——希臘的斯多噶學派（Stoic School）的哲學家與邏輯家們又討論了許多種可能的關於蘊函的概念（在他們的著作中我們可以看到語句演算的最早開端）。

义的。很难找出两个人在完全相同的意义上用同一个語詞，即使在同一个人的語言中，在他生活的不同时期，一个語詞的意义也有所变化^①。并且，在日常語言中，一个字的意义常常是非常复杂的；一个語詞的意义，不仅依据于这个語詞的外表形式，还依据于說这个語詞时的环境，有时甚至依据于主观的心理因素。如果一个科学家要引用一个日常語言中的概念到科学中去，并且要建立关于这个概念的普遍規律，他就必須使这个概念的内容更清楚、更确切、更簡單，使这个概念能去掉那些不相干的性质。邏輯家引用“如果…那么…”到邏輯中去，是这样的态度，物理学家引用“金屬”这个語詞到物理学中去，也是这样的态度。因此，不論一个科学家用什么方法来完成这个任务，为他所規定的語詞用法与日常語言中的用法，多少总会有些出入。如果一个科学家明确地表示他将一个語詞用成什么意义，同时，如果他又一貫地遵照他所决定的用法，那么，就沒有人能加以反对，說他的做法会导致无意义的結果。

然而，也有些邏輯家，注意到关于蘊函的爭論，于是进行修改蘊函的理論。一般地說，他們并不否认实质蘊函在邏輯学中的地位，而是竭力想在邏輯学中为另外一种蘊函的概念找寻一个地位；例如，他們竭力想建立这样一种蘊函式，即：从前件推出后件的可能性，乃是一个蘊函式之为真的必要条件。甚至，他們要求把这个新概念放在首要的地位。这些嘗試都还是較近的事情，目前要对它們作一个最后的評價，还嫌太早。^① 但是，实质蘊函在簡便方面必定超过任何其他的蘊函理論，这一点在今天几乎已經成为定論。而且，我們必須記住：正是建筑在这个簡單的实质蘊函上面的邏輯学，已經证明是最复杂精細的数学推理的滿意的基礎。*

① 第一个作这种嘗試的人，是当代的美国哲学家与邏輯学家路易士 (C. I. Lewis)。

§9. 蘊函式在数学中的应用

“如果…那么…”是在其他科学中, 特别是在数学中被經常应用的邏輯表达式之一。数学定理, 尤其是具普遍性质的数学定理, 总是应用蘊函式的形式。在数学中, 前件被称之为假設, 后件被称之为結論。

作为一个具有蘊函形式的数学定理的簡單例子, 我們可以举下面这个語句:

如果 x 是一个正数, 那么, $2x$ 是一个正数。

在这个語句中, “ x 是一正数”是假設, 而“ $2x$ 是一正数”是結論。

除了这个所謂数学定理的經典形式以外, 在数学中, 有时候也应用种种别的表示形式, 不用“如果…那么…”而用其他方式將假設与結論联結起来。例如, 上面那个数学定理就可以用下列这些另外的形式来表示:

由: x 是一个正数, 推出: $2x$ 是一个正数;

x 是一个正数这个假設, 蘊函一个結論或具有一个結論作为后件, 即: $2x$ 是一个正数;

x 是一个正数这个条件, 对于 $2x$ 是一个正数說, 是充分的;

对于 $2x$ 是一个正数說, x 是一个正数是充分的;

$2x$ 是一个正数这个条件, 对于 x 是一个正数說, 是必要的;

对于 x 是一个正数說, $2x$ 是一个整数是必要的。

因此常常我們不述說一个条件語句, 而說: 这个假設蘊函这个結論, 或者說, 这个假設, 作为它的后件, 具有这个結論, 或者說, 这个假設是这个結論的充分条件, 或者說, 这个結論从这个假設中推出, 或者說, 这个結論是这个假設的必要条件。对于上面的某些表达方式, 邏輯学家也許会提出反对意見, 但是, 它們在数学中是被

普遍应用的。

*这些可能的反对意見所述及的是那些包含像“假設”、“結論”、“后件”、“推出”、“蘊函”等等任何这些語詞的表述。

要了解这些反对意見的要点,首先我們要注意到,上面那些表述与原来的那个表述在內容上是不相同的。在原来的表述中,我們所談到的只是数、数的性质、数的运算等等;因而,我們所談到的是数学所涉及的事物。但是,在上面那些表述中,我們却談到了假設、結論、条件,而假設、結論与条件却是关系到在数学中出現的語句或語句函項的。这里我們应当注意:指示一門科学所研究的事物的那些語詞,与指示一門科学中的各种表达式的那些語詞,是有区别的。但是,人們一般地都沒有将这二者分別清楚。在数学,尤其是在基本数学中,便可看到这种情形。很少人認識到这个事实,在初等代数的教科书里到处碰到的語詞,如“等式”、“不等式”、“多項式”或“代数分式”,严格說来,是不屬於数学或邏輯的范围的,因为,这些語詞并不指示数学或邏輯所研究的事物:等式与不等式是一些特殊的語句函項,而多項式与代数分式——尤其是在基本数学教科书中——都是指示函項的特殊例子(参看 §2)。这种混乱的产生,是由于我們常常应用这一类語詞去表述数学定理。这已經成为非常普通的用法,也許我們无須去反对它,因为这并不会引起任何特殊的困难或錯誤。但是,我們却应当了解:相应于每一个应用这些語詞所表述的数学定理,我們都可以有另一个在邏輯上更正确的表述方式,在后者中根本不出現上面那些語詞。例如,相应于下面这个数学定理:

等式 $x^2 + ax + b = 0$, 至多只有两个根

我們可以有下面这个更正确的表述方式:

最多有两个数 x , 使得 $x^2 + ax + b = 0$ 。

現在，回到上面那些成問題的關於蘊函的表述方式，我們必須強調指出更為重要的一點。即：在這些表述中，我們斷定：一個語句（即蘊函式的前件）以另一個語句（即蘊函式的後件）為它的結論，或者說，後一個語句從前一個語句推出。但是，當我們這樣表示的時候，通常我們心裡總有這樣一個思想：假定第一個語句是真，就必然要使我們肯定第二個語句是真（並且很可能有這樣一個思想，即我們甚至能從第一個語句中得出第二個語句）。但是，如在 §8 我們所已經知道的，在現代邏輯所規定的意義中，蘊函並不依據於前件與後件之間是否有那樣一種聯繫。現代邏輯認為：

如果 $2 \cdot 2 = 4$ ，那麼，紐約是一個大城市
是一個有意義的、甚至是一個真的語句；對這一點感到驚異的人，必定會更難於接受

$2 \cdot 2 = 4$ 這個假設，具有一個結論，即，紐約是一個大城市
這樣一個語句了。因此，我們看到，上面所舉的那些表述（或變換）
一個條件語句（即蘊函式）的方式，會引導出令人感到荒謬的說法，
並從而更加深了日常語言與數理邏輯之間的距離。正是由於這個
原因，因此上面那些表述方式不斷地引起各種各樣的誤解，而成為
那些激烈的，往往是无結果的爭論的根源之一。

從純粹邏輯的觀點看，很明顯，我們能夠避免這裡所說的一切
反對意見，只要我們明白確定地說明：我們用上面那些表述方式
時，我們不考慮它們的日常意義，而只給予它們以現代邏輯中蘊函
式所具有的那樣的意義。但是，這樣作，又會有另一方面的不方便；
因為，在有些場合中——雖然不是在邏輯本身，但是，在一個與邏輯
密切相關的領域中，即在演繹科學的方法論中（參看第 VI 章）——
我們要講到語句以及語句與語句之間的推理關係。那時候我們要把
“蘊函”、“推出”等詞用成一種不同的，比較更近似於日常語言的

意义。因此，最好还是根本避免应用上面那些表述方式，特别是因为我們拥有許多其他不会遭受反对的表述方式可以供我們应用 $\oplus \ominus$ 。*

§10. 語句的等值式

現在我們来研究語句演算範圍中的另一个表达式。这个表达式就是“如果，而且仅仅如果”（或作：“当且仅当”——譯者）。它在日常語言中比較地不常見。如果任何两个語句被这个表达式所联接起来，結果便得出一个复合語句。这个复合語句，就叫做等值式。等值式中的两个語句，分別地叫做等值式的左方与右方。當我們断定一个由两个語句构成的等值式时，我們的意思是要排除这种可能性，即：它們之中的一个真而另一个假。因之，如果一个等值式中的左方与右方都是真的，或都是假的，那么，这个等值式便是真的，否則，这个等值式便是假的。

我們还可以用另一个方式来表述等值式的意义。在一个条件語句中，如果我們把前件与后件互相調換，我們得出一个新語句；这个新的語句，叫做原来那个語句的逆語句（或者說，是那个原語句的逆換式）。例如：

(I) 如果 x 是一个正数，那么， $2x$ 是一个正数
就是一个蘊涵式或条件語句。把这个蘊涵式当作原語句，它的逆語句就是：

(II) 如果 $2x$ 是正数，那么， x 是正数。

这个例子表明，原語句与它的逆語句恰巧都是真的。但是，这并不是普遍的規律。这一点很容易理解，如果我們用“ x^2 ”代換上例(I)和(II)中的“ $2x$ ”，那么，代換之后，(I)仍然是真的，而(II)却是假的。如果有这样的情形，即两个条件語句（其中一个是另一个的逆

語句)都是真的,那么,我們可以用“当且仅当”联接这两个語句,以表示这两个語句同时是真这一事实。因此,上面那两个蘊函式——原語句 (I) 和逆語句 (II)——可以代換成下面这一个語句:

x 是一个正数,当且仅当 $2x$ 是一个正数

(在这个等值式中,左方与右方可以互相調換。)

此外,还有一些别的表述方式,也可以表示同样的意思,例如:

从: x 是一个正数,就推出: $2x$ 是一个正数,并反之亦然。

x 是一个正数这个条件与 $2x$ 是一个正数这个条件是互相等值的。

x 是一个正数这个条件,对于 $2x$ 是一个正数說,是一个既必要又充分的条件。

对于 x 是一个正数說, $2x$ 是一个正数是既必要而且充分的。

因此,不用“当且仅当”来联接两个語句,一般地我們还可以采用下列这样一些說法,即:在这两个語句之間有互相推論的关系;或者,这两个語句是等值的;或者,这两个語句中的任一个是另一个的必要而且充分的条件。

§11. 定义的表述方式与定义的規則

我們常常用“当且仅当”这个短語去下定义。也就是說,如果一个表达式在某門科学中第一次出現,而我們对这个表达式又不能直接有所了解时,我們就要作出一个約定,来确立这个表达式的意义:这就是所謂定义。例如,設想在算术中,符号“ $\leq$ ”尚未被应用过,而現在我們想要把它引用到算术中來(像通常那样,把“ $\leq$ ”看作是“小于或等于”的簡写)。为此,首先我們必須予“ $\leq$ ”以一个定义,也就是說,我們必須先利用一些已知的,已經具有明确意

义的表达式來說明“ $\leq$ ”的确切意义。为此,我們就給它下这样一个定义(假定“ $>$ ”是一个已知的符号):

我們說 $x \leq y$, 当且仅当不是 $x > y$ 。

这个定义表示,下面两个語句函項,即

$$x \leq y$$

与

$$\text{不是 } x > y$$

是等值的。因此,我們可以說:这个定义使我們得以把公式 $x \leq y$ 轉換为另一个等值的表达式,这个表达式不再包含 $x \leq y$, 而是完全由其他已經为我們所了解的詞項所构成的。同样如果我們用任何指示数的符号或表达式去代換“ $x \leq y$ ”中的“ x ”与“ y ”,对于所得出的任何公式來說情形都是一样。例如,用“ $3+2$ ”代換“ x ”,用“ 5 ”代換“ y ”,結果得出的这个公式:

$$3+2 \leq 5$$

和

$$\text{不是 } 3+2 > 5$$

这个語句是等值的;又,因为后一个語句是真的,因此前一个也是真。同样,如果用“ 4 ”代換“ x ”,用“ $2+1$ ”代換“ y ”,結果得出下面这个公式:

$$4 \leq 2+1$$

它和

$$\text{不是 } 4 > 2+1$$

这个語句是等值的,并且两者都是假的。这一点也适用于更复杂的語句和語句函項,例如,語句

$$\text{如果 } x \leq y \text{ 而且 } y \leq z, \text{ 那么, } x \leq z.$$

可以轉变为

如果不是 $x > y$ ，而且，如果不是 $y > z$ ，那么不是 $x > z$ 。

总之，根据上面所下的那个定义，我們可以把任何包含“ $\leq$ ”的簡單或复杂語句，轉变成一个不包含“ $\leq$ ”的等值語句；换言之也可以說，就是把包含“ $\leq$ ”的語句翻譯到一种不包含“ $\leq$ ”的語言中去。并且正是这一点，它构成定义在数学中所起的作用。

为要使一个定义完善地完成它的任务，必須在下这个定义时注意一些应当事先注意的事項。为此，就确定了一些特殊的規則，这就是所謂定义規則，定义規則告訴我們如何作出一个正确的定义。这里我們不想詳尽确切地多談这些定义規則。我們只是指出：根据这些定义規則，每一个定义都可以具有等值式的形式，等值式的第一部分，叫做被定义者 (definiendum)，第二部分，叫做定义者 (definiens)。第一部分，即被定义者，总是一个簡短的，文法上比較簡單的語句函項，它包含那个要被定义的常項。第二部分，即定义者，是一个具有任意結構的語句函項，在它之中只包含那些或者它的意义是直接明白的，或者，它的意义是已經經過解釋的常項。有一点應該特別注意：那被定义的常項，或任何其他曾借助于这个常項去解釋的表达式，都不得在定义者中出現。如果它們在定义者中出現，这个定义便是不正确的，便犯了普通所謂循环定义的錯誤。（正如循环证明的錯誤一样；凡用一个論证去证明某一定理，而这个論证却是根据于这个定理，或根据于曾用这个定理去证明的其他定理的，这种情形叫做循环证明。）为了着重区分定义的約定的性质与其他具有等值式形式的語句之間的差別，最好，在定义之前我們加上“我們說”这样几个字。很容易看出，上面关于“ $\leq$ ”的那个定义是滿足了所有这些条件的。它的被定义者是：

$$x \leq y$$

而它的定义者是：

不是 $x > y$

值得注意的是, 数学家在下定义时, 常常喜欢用“如果”或“在…情形下”, 而不用“当且仅当”这个短語。例如, 如果他們要給符号“ $\leq$ ”下一个定义, 他們大概会采用这样的方式:

我們說 $x \leq y$, 如果不是 $x > y$ 。

这个定义看起来好像只是表示, 被定义者从定义者推出, 而沒有着重表示, 定义者也可以从被定义者推出, 因此似乎沒有表示被定义者与定义者是等值的。但是事实上, 这是一种非正式的約定, 即当我们用“如果”或“在…情形下”去联結被定义者与定义者时, 这些語詞的意义就等于“当且仅当”所表示的意思。

此外, 还有一点应当附加說明, 就是等值式的形式, 并不是定义所能采用的唯一形式 $\oplus\ominus$ 。

§12. 語句演算的定律

我們已經討論过語句演算中一些最重要的表达式, 現在我們就試着來說明語句演算的种种定律的性质。

讓我們研究下列这个語句:

(I) 如果 1 是一个正数, 而且 $1 < 2$, 那么, 1 是一个正数。

这个語句很明显是真的; 这个語句仅仅包含属于邏輯与算术領域的常項, 但是, 却从来沒有人会想到要把这个語句作为一个定理放到数学教科书里去。如果我們想一想, 这是什么原因, 我們会得出这样的結論: 因为这个語句从数学的观点看是完全无意义的; 它并不能在任何方面增加我們对于数的知識, 这个語句的真, 根本不依靠于它所包含的那些数学語詞的内容; 而只是根据于“与”, “如果”, “那么”这些語詞的意义。

为了明确这一点, 讓我們将这个語句中的

1 是一个正数

与

$1 < 2$

換成屬於任意領域的任何其他語句; 其結果是得出一系列的語句, 其中每一個, 都和原語句一樣是真的。例如, 我們將“1 是一个正数”換成“某一图形是一个菱形”, 將“ $1 < 2$ ”換成“这个图形是一个长方形”, 結果得出下面这个語句:

(II) 如果某一图形是一个菱形, 而且, 如果这个图形是一个长方形, 那么, 这个图形是一个菱形;

又, 如果我們將“1 是一个正数”換成“今天是星期天”, 將“ $1 < 2$ ”換成“太阳在照耀着”, 結果便得出下面这个語句:

(III) 如果今天是星期天, 而且, 如果太阳在照耀着, 那么, 今天是星期天。

为了用一种更普遍的方式来表示这一事实, 我們將要引入变項“ p ”与“ q ”, 并規定“ p ”与“ q ”这些符号在这里不是表示关于数或其他任何事物的指示詞, 而是代表一个整个的語句。这一种变項, 我們叫做語句变項。現在我們可以用“ p ”来代換“1 是正数”, 用“ q ”来代換“ $1 < 2$ ”, 于是我們便得出一个語句函項:

如果 p 而且 q , 那么, p 。

这一个語句函項具有这样的一种特性, 即: 用任意語句去代換“ p ”、“ q ”, 結果所得出的語句, 总是真語句。这一种性质, 我們可以用一个普遍命題的形式来表述它:

对于任何 p 与 q , 如果 p 而且 q , 那么, p 。

这里, 我們得出了一个語句演算的定律, 这个定律叫做邏輯乘法的簡化定律。上面 (I) (II) (III) 各个語句都只是这个普遍定律的特殊例子, 正如公式:

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

只是下面这个普遍的数学定理

对于任意数 x 与 y , $x \cdot y = y \cdot x$

的特殊例子一样。

用同样的方式, 我們还可以得出語句演算的其他定律。現在讓我們举几个这样的普遍定律。在表述这些普遍定律时, 按照 § 3 所提出的那种习惯用法, 我們將全称量詞“对于任何 p , $q \dots$ ”省掉了; 在整个語句演算中, 我們將貫徹这个用法。

如果 p , 那么, p 。

如果 p , 那么, q 或 p 。

如果 p 蕴涵 q , 而且 q 蕴涵 p , 那么 p , 当且仅当 q 。

如果 p 蕴涵 q , 而且 q 蕴涵 r , 那么, p 蕴涵 r 。

上面, 第一个語句叫做同一律。第二个語句叫做邏輯加法的簡化定律。第四个語句叫做假言三段論定律。

正如带有普遍性质的算术定理是对于任意数的性质有所断言一样, 語句演算的定律, 可以說, 是对于任意語句的性质有所断言。在这些定律中, 只包含这样一些变項, 这些变項所代表的是完全任意的語句, 正是这一点构成語句演算的特点, 并且使語句演算具有极大的普遍性和应用范围。

§13. 語句演算的符号; 真值函項与真值表

有一个簡單而且普遍的方法, 叫做真值表的方法 (method of truth tables, or method of matrices)^①, 它可以使我們知道語句演算中的某一特殊的語句是否真, 并因此, 可以使我們知道这一特殊語句是否可以算作語句演算的定律之一。

① 这个方法是皮尔斯所創始的。前面我們已提到他。(参看第 12 頁 §5 注 ①)

为了表述这个方法, 我們最好应用一些特別的符号。我們將用符号

$$\sim; \quad \wedge; \quad \vee; \quad \rightarrow; \quad \leftrightarrow$$

分別去代替

“不”, “而且”, “或”, “如果..., 那么...”, “当且仅当”。

第一个符号 (即“ $\sim$ ”), 我們把它放在我們要否定的那个表达式的前面; 其余的符号則都是放在两个表达式的中間。(因此“ $\rightarrow$ ”就占据“那么”这个詞的原来位置, 并将“如果”去掉。) 这样, 应用这些符号, 由一个或两个較简单的表达式我們构成一个較复杂的表达式; 而如果我们想用这个較复杂的表达式再构成更复杂的表达式, 我們就便用一个括弧将这个原来的較复杂的表达式括起来。

应用变項、括弧以及上面列举的那些常項符号 (有时还应用一些我們在这儿不拟討論的相似性质的常項), 我們就可以写出語句演算範圍之中的一切語句与語句函項。除了单个的語句变項 (如 $p, q, \dots$) 以外, 最簡單的語句函項是下列这些表达式:

$$\sim p, \quad p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \rightarrow q, \quad p \leftrightarrow q$$

(以及其他許多只是变項的形式不同的表达式)。作为复合語句函項的一个例子, 讓我們研究下面这个語句:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q),$$

这个复合的語句函項如果翻譯成普通語言, 便是:

如果 p 或 q , 那么, p 而且 q 。

上面所讲到的假言三段論, 就是一个更复杂的表达式。它現在換成下面这个形式:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

我們很容易可以明白, 在語句演算中出現的任何語句函項, 都

是一个所謂真值函項。說一个語句函項是一个真值函項,就是說:凡用語句去代換这个語句函項中的各变項而得出的任何語句,它的真假完全依据于被代換进去的那些語句的真假。这一点,就最簡單的語句函項,如“ $\sim p$ ”,“ $p \wedge q$ ”,等等而說,根据 §7, §8, §10 中所讲的“不”,“而且”等等这些詞的邏輯意义是可以立刻明白的。但是,这一点同样也适用于复合的語句函項。例如;我們来研究“ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ”这个复合函項。用語句去代換其中的語句变項所得出的一个語句是一个蘊函式;并因此,这个蘊函式的真假仅仅依据于它的前件与后件的真假。它的前件,即一个由用語句去代換“ $p \vee q$ ”中的变項而得出的析取式,这个前件的真假唯一依据于那用来代換变項“ p ”与“ q ”的两个語句的真假。同样,后件的真假,唯一依据于那用来代換变項“ p ”与“ r ”的两个語句的真假。因此,最后地說,从上述語句函項所得出的整个語句,它的真假完全依据于用来代換变項“ p ”、“ q ”、“ r ”的那些語句的真假。

为了明确認識:何以通过代換从一个特定的語句函項所得出的語句的真假,依据于代換进去的那些語句的真假,我們构造了一种所謂真值表。

我們先举出語句函項“ $\sim p$ ”的真值表:

p	$\sim p$
T	F
F	T

下面,是其他的基本語句函項“ $p \wedge q$ ”,“ $p \vee q$ ”等等的联立真值表:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T

如果我們把這些表中的, “T” 看作是“真語句”的簡寫, “F”看作是“假語句”的簡寫。這些表的意義就立刻變得可以理解了。例如, 在第二表中, 在“ p ”、“ q ”、“ $p \rightarrow q$ ”之下, 第二橫行中的字母分別地是“F”、“T”、“T”。由此, 我們知道: 如果我們用任何一個假語句去代換“ $p \rightarrow q$ ”這個蘊函式中的“ p ”, 用任何一個真語句去代換這個蘊函式中的“ q ”, 經過代換之後所得出的語句是真的。顯然, 這同 §8 中所講的是完全一致的。當然, 上面表中的“ p ”、“ q ”可以改用任何其他變項。

上面這兩個表, 叫作基本真值表。用這兩個表我們可以列出任何複合語句函項的导出真值表 (derivative truth table)。例如, 函項“ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ”的导出真值表, 就是下面這樣:

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	T

为了解釋这个表的构造, 讓我們集中注意, 譬如說, 它的第五橫行(綫以下的第五橫行)。我們用真語句去代換“ p ”与“ q ”, 而用假語句去代換“ r ”。按照前面第二个基本表, “ $p \vee q$ ”經過这样代換后所得出的語句是一真語句, “ $p \wedge r$ ”經過这样代換后所得出的語句是一假語句。而整个的函項 “ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ”, 經過这样代換后, 便得出一个蘊函式, 其中前件是真的, 而后件是假的; 因此, 再应用第二个基本表(我們將第二个基本表中的“ p ”与“ q ”暫時看作“ $p \vee q$ ”与“ $p \wedge r$ ”), 我們就可作出結論: 这个蘊函式是一个假語句。

在上表中直綫左边的“T”与“F”有八个橫行。每一个橫行表示一集可能的代換。當我們划一个函項的真值表时, 應該注意将各个可能的代換集都划出来, 而不要遺漏。很容易看出, 如果一个語句函項中有一个变項, 那么, 可能的代換集就有 2^1 个, 即是二个; 如果有两个变項, 可能的代換集就有 2^2 个, 即四个; 如果有三个变項, 可能的代換集就有 2^3 个, 即八个; 余可类推。

上表的直綫右边, 有三个直行。我們需要研究的那个函項常常包含着几个函項, 例如, 在 “ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ” 这个函項中, 就又包含了两个函項, 即 “ $p \vee q$ ” 与 “ $p \wedge r$ ”。直綫右边的直行的数目, 等于我們要研究的那个函項中所包含的函項的数目, 再加上那个所要研究的函項本身之和。

現在, 我們就有可能來說明如何決定在語句演算中一个語句的真假。我們知道, 在語句演算中, 語句和語句函項是沒有外形的区别的。唯一的区别只在于: 凡是被当作为語句的表达式, 我們就在思想中在这个表达式之前加上一个全称量詞。为了要認識某个特定的語句是否真, 暫時, 我們可以将它当作是一个語句函項, 給它划一个真值表。如果在真值表的最后一个直行中, 沒有“F”出

現，这就表示：由这个語句函項經過代換而得出的每一語句，都是真的。这样，我們原来的那个（由我們在思想中給这个語句函項加上全称量詞而得出的）普遍語句便也是真的。但是，只要在真值表的最后一个直行中包含一个“F”，我們的那个語句便是假的。

因此，举例說，我們知道在“ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ”的真值表的最后一直行中，“F”出現了四次；因而，如果我們將“ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ”看作一个語句（即，如果我們在思想中在它前面給它加上“对于任何 p, q 与 r ”这些字），那么我們就会得出一个假語句。另一方面，用真值表的方法，我們很容易可以表明 §12 中所举的所有那些語句演算定律，如簡化律、同一律，以及其他定律等等，都是真語句。例如，簡化定律

$$(p \wedge q) \rightarrow p,$$

它的真值表是：

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
T	T	T	T
F	T	F	T
T	F	F	T
F	F	F	T

这里我們再举出一些其他的重要的語句演算的定律，这些定律都可以用同样的方法确定它們是真的：

$$(1) \sim[p \wedge (\sim p)]$$

$$(2) p \vee (\sim p)$$

$$(3) (p \wedge p) \leftrightarrow p$$

$$(4) (p \vee p) \leftrightarrow p$$

$$(5) (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(6) (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p) ,$$

$$(7) [p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$$

$$(8) [p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$$

上面的(1),叫做矛盾律, (2)叫做排中律。(3), (4)分別地是邏輯乘法的重言定律與邏輯加法的重言定律。(5), (6)是兩個交換定律。(7), (8)是兩個結合定律。很容易看出,如果我們企圖用日常語言去表述上面的最後兩個定律,它們的意義會變得如何晦澀難解。這就非常清楚地表明了邏輯符號,作為一個表達複雜思想的精確工具,它的價值所在。

*有些語句,它們之為真,在應用真值表方法以前,似乎是很难看得出來的。但是,一經應用真值表,我們就認識到它們是真的。我們可以舉幾個例:

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$(\sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

這些語句的真所以不够明顯,主要原因是在於:它們都表現了蘊函的特別用法,這就是實質蘊函的用法,實質蘊函這種特別用法,正是近代邏輯的特點 $\oplus \ominus$ 。

這些語句,如果我們用日常語言去翻譯它們,用“蘊函”、“推出”這些語詞去代換“ $\rightarrow$ ”,其結果就會變得特別地荒謬難解,例如,如果我們把它們變成下面這樣的形式:

如果 p 是真的,那麼, p 可從任何 q 中推出(換言之:一個真語句可以從任何語句中推出);

如果 p 是假的,那麼, p 蘊函任何 q (換言之:一個假語句蘊函任何語句);

對於任何 p 與 q , 或者 p 蘊函 q , 或者 q 蘊函 p (換言之:

在任何两个語句中，至少有一个蕴涵另一个)。
以这样的方式来表述，这些語句，就成为是經常引起誤解与爭論的根源。这一点完全可以确证我們在 §9 末尾所表示的意見。*

§14. 語句演算定律在推理中的应用

在任何科学領域中，几乎所有的推理都是明显或不明显地根据于語句演算定律的。我們現在試圖用一个例子來說明这种情况。

給定一个具有蕴涵式的語句，我們就能，除了得出(在 §10 中曾經讲过的)它的逆語句以外，还能得出两个另外的語句，即，反語句(或原給定語句的反語句 [inverse sentence])与逆反語句 (contrapositive sentence)。将原給定語句的前件与后件分別地換成它們的否定式，就得出这个原給定語句的反語句。将反語句的前件与后件互相調換，就得出这个語句的逆反語句。因此，逆反語句，就是反語句的逆語句，同时，也是逆語句的反語句。逆語句、反語句、逆反語句以及原来的語句，这些合起来就叫作共軛語句 (conjugate sentences)。作为說明，我們可以研究下面这个条件語句：

(I) 如果 x 是一个正数，那么， $2x$ 是一个正数。

从这个語句，就可作出下面三个共軛語句：

如果 $2x$ 是一个正数，那么， x 是一个正数。

如果 x 不是一个正数，那么， $2x$ 不是一个正数。

如果 $2x$ 不是一个正数，那么， x 不是一个正数。

就这个特殊的例子說，所有这些共軛語句同样都是真的。但是，这并不是普遍的情形。有时虽然原来的語句是真的，但是很可能不但它的逆語句(如 §10 中已經談过)可能是假的，并且它的反語句也可以是假的；这一点，我們只要用“ x^2 ”代換上面这些語句中的

“ $2x$ ”，就可以立刻明白了。

这样，我們就知道，从一个蘊函式的真，不能推出它的逆語句或反語句也真。但是，对于另一个共軛語句，即逆反語句，情形就不同了。在任何时候，只要一个蘊函式是真的，它的逆反語句也是真的。这一点可以用无数的例子来证明，并且是一条語句演算的普遍定律，即所謂易位定律或逆反定律。

为了要准确地表述这个定律，我們可以注意到，每一个蘊函式都可以表示为下面这个标准形式：

如果 p ，那么， q 。

它的逆語句、反語句与逆反語句就是下面这些形式：

如果 q ，那么， p 。

如果不 p ，那么，就不 q 。

如果不 q ，那么，就不 p 。

因此，易位定律，它表示任何一个条件語句都蘊函它的逆反語句，可以表述如下：

如果：如果 p ，那么， q ；那么：如果不 q ，那么，不 p 。

为了要避免“如果”和“那么”太多，我們可以把它稍作修改，表述如下：

(II) 从：如果 p ，那么， q ，可推出：如果不 q ，那么，不 p 。

現在我們要說明，如何借助于这个定律，我們可以从一个具有蘊函式的語句[例如从語句(I)]推出它的逆反語句。

上面(II)这个語句适用于任意語句“ p ”与“ q ”，因而，如果用

x 是一个正数

与

$2x$ 是一个正数

去分別代換“ p ”与“ q ”，(II) 这个語句仍然是真的。为了行文的方

便，我們將“不”字的位置改動一下，得出下面這個語句：

(III) 从：如果 x 是一個正數，那麼， $2x$ 是一個正數，可推出：

如果 $2x$ 不是一個正數，那麼， x 不是一個正數。

現在我們比較一下(I)与(III)這兩個語句。(III)是一個蘊函式，而(I)是(III)這個蘊函式的假設。由於整個蘊函式和這個蘊函式的假設都被確認為是真的，所以，這個蘊函式的結論同樣也被確認為是真的；但是蘊函式的結論，即：

(IV) 如果 $2x$ 不是一個正數，那麼， x 不是正數。

恰是語句(I)的逆反語句。

這樣，一個人了解了逆反定律，如果他以前已經證明某一個語句為真，就可以認識到這個語句的逆反語句也是真的。此外，我們很容易看到：反語句就是逆語句的逆反語句（即是說，將逆語句的前件与后件都換成否定式，再互相調換，便得出反語句）；因此，根據這個理由，如果一個語句的逆語句被證明為真，那麼，反語句同樣也就可以被認為真。因此，如果我們能證明兩個語句，即原來的語句与它的逆語句，那麼，其他的共軛語句就用不着證明了。

這裡可以提到一下，逆反定律還有許多變形。其中一個，就是(II)的逆語句：

从：如果不 q ，那麼，不 p ，可推出：如果 p ，那麼， q 。

這個定律，使我們可以从逆反語句推出原來的語句，并从逆語句推出反語句。

§15. 推論的規則，完全的證明

在上節中，我們證明了(IV)這個語句，現在，我們要比較更仔細地來研究一下這個證明的步驟本身。除了我們在上面已經講過的定義的規則以外，我們還有其他一些性質類似的規則，即推理的

規則，或者說，證明的規則。這些規則，不應誤解為是邏輯定律，它們只是一些指示 (directions)，告訴我們已知為真的語句如何可以經過轉變而產生新的真語句。在上章所作的證明中，已經用到了兩個證明的規則，即：代入規則 (rules of substitution) 與分離規則。分離規則一般也稱作承認前件的推理規則 (modus ponens rule)。

代入規則的內容是這樣：如果一個被接受為真的全称語句包含了語句變項，如果這些變項被別的語句變項或語句函項或語句所代換——一貫地用相同的表达式代換相同的變項——那麼，這樣代換後所得出的語句，也應該被接受為真。正是應用這一條規則，在上一章中我們由(II)得出(III)。應當着重指出，代入規則也可以應用於別種變項，例如，應用於指示數的“ x ”，“ y ”，…等等這些變項。對於這些變項而說，我們可以用任何表示數的表达式去代換它們。

*上面所作的這個對於代入規則的表述，是不十分精確的。代入規則應用於這樣的語句，這些語句由一個全称量詞與一個語句函項所構成，在這個語句函項中包含有被全称量詞所約束的變項。當我們應用代入規則時，我們便將量詞省略掉，而用其他的變項或表达式去代換以前為這個量詞所約束的那些變項（即是說，用語句函項或語句去代換變項“ p ”，“ q ”，“ r ”，…，用指示數的表达式去代換變項“ x ”，“ y ”，“ z ”，…）；在這個語句函項中出現的任何其他被約束的變項，則仍是保留不變；必須注意的是：在用以代換的那些表达式中，不能出現與那些保留不變的變項形式相同的變項。必要時，可以在這樣代換後所得出的表达式之前，加上一個全称量詞，以便使這個表达式變成一個語句。例如，應用代入規則於下面這個語句：

对于任何数 x , 有一个数 y , 使得 $x+y=5$,
可以得出下面这个語句:

有一个数 y , 使得 $3+y=5$,
但是也可以得出下面这个語句:

对于任何数 z , 有一个数 y , 使得 $z^2+y=5$ 。

这样, 在上面这两个例子中, 我們只代換了“ x ”, 而“ y ”仍保留不变。但是必須注意, 我們在用一个表达式去代換“ x ”时, 这个表达式中不可以包含“ y ”。因为, 如果这样, 便会得出一个假語句, 尽管原来的那个語句是真的。例如, 用“ $3-y$ ”去代換“ x ”, 便得出:

有一个数 y , 使得 $(3-y)+y=5$ 。*⊕⊗

分离規則是: 如果有两个語句被认为是真的, 其中一个是蘊函式, 而另一个是这个蘊函式的前件, 那么, 作为蘊函式的后件的那个語句, 也应该被认为是真的。(因此, 我們說, 就好像是我們使前件从整个蘊函式中“分离”出来。) 应用这个規則, 我們就在上节中从(III)与(I)中推出(IV)。

由此可以看出, 在上节所作的語句(IV)的证明中, 证明的每一步驟都在于应用一条推理規則到某些語句上去, 这些語句是我們前此已經接受为真的語句。这样的—个证明, 就叫作一个完全的证明。更准确一点, 我們可以这样来表述一个完全的_{证明}的性质: 一个完全_{的证明}, 就是一个由具有下列性质的語句所构成的联鎖, 联鎖开始的那些語句, 是一些以前已被接受为真的語句; 以后的每一个語句, 都是可以根据一条推理規則由在先的語句中得出的語句, 而联鎖的最后一个語句, 則就是我們所要证明的那个語句。

我們可以注意到, 由于对邏輯定律与推理規則的認識与应用, 所有的数学推理, 都采取了一个——从心理学的观点看——极端

简单的形式。复杂的心理过程，都完全可以还原为这样一些简单的活动，如：对以前已被接受为真的語句的留心观察，对語句与語句之間純粹外形結構方面的关系的知觉，以及根据推理規則的机械的轉換等。很明显，由于这样一个方法，在证明中产生錯誤的可能性就减少到了最低程度^{⊕Ⓣ}。

练 习

1. 从算术与几何的领域中，举出一些純粹屬於数学的表达式。
2. 在下列两个語句中，区别哪些表达式是純粹屬於数学的表达式，哪些表达式是屬於邏輯範圍的表达式：

(a) 对于任何数 x 与 y ，如果 $x > 0$ 而且 $y < 0$ ，那么，有一个数 z ，使得 $z < 0$ 而且 $x = y \cdot z$ ；

(b) 对于任何两点 A 与 B ，有一个点 C ， C 在 A 与 B 之間，而且 C 到 A 的距离等于 C 到 B 的距离。

3. 用下列两个語句函項的否定式作成一合取式：

$$x < 3$$

与

$$x > 3.$$

甚么数能适合这个合取式？

4. “或”有两个意义，指出下列各个語句中的“或”是甚么意义：

(a) 在他面前有两条路：或者卖国，或者死；

(b) 假如我赚了很多錢或賽馬获胜，我就要作一次远距离旅行。

讀者試自己再举几个关于“或”的例子。

- *5. ^{⊕Ⓣ} 研究下列的条件語句：

(a) 如果今天是星期一，那么，明天是星期二；

- (b) 如果今天是星期一, 那么, 明天是星期六;
- (c) 如果今天是星期一, 那么, 十二月二十五日是圣诞节;
- (d) 假如願望能变成馬, 乞丐也有馬騎;
- (e) 如果一数能被 2 与 6 除尽, 那么, 这个数将能被 12 除尽;
- (f) 如果 18 能被 3 与 4 除尽, 那么, 18 能被 6 除尽。

从数学邏輯的观点看, 上面这些蘊函式中哪个是真? 哪个是假?

从日常語言的观点看, 上面那些蘊函式中, 哪些会发生有无意义的問題与真假的問題? 特別注意語句(b), (b)的真假要看(b)是在一星期中的那一天說的; 研究一下这个問題。

6. 用通常条件語句的形式表示下列諸定理:

(a) 为使一个三角形是一个等边三角形, 这个三角形的三角相等是充分的条件。

(b) x 能被 3 除尽这个条件, 对于 x 能被 6 除尽是必要的。

試再用另外的办法表示上面这两个条件語句。

7. 条件: $x \cdot y > 4$ 是

$$x > 2 \text{ 与 } y > 2$$

的正确性的必要的或充分的条件嗎?

8. ④⑤ 給出下列語句的选言的公式:

(a) x 被 10 除尽, 当且仅当 x 既被 2 除尽又被 5 除尽。

(b) 为了使一个四边形是一平行四边形, 两条对角綫的交点是这两条对角綫的中点, 是既必要的而且充分的。

試从算术与几何領域中, 再举出一些具有等值式形式的定理, 作为例子。

9. 在下列語句中, 哪些是真的?

(a) 一个三角形是三等边的, 当且仅当这个三角形的三边之高是相等的。

(b) 为使得 x^2 是一个正数, $x \neq 0$ 是必要的而且充分的。

(c) 一个四边形是正方形, 蕴涵这个四边形的四角都是直角。反之亦然。

(d) 为使 x 能被 8 除尽, x 能被 4 除尽而且能被 2 除尽是必要的而且充分的。

10. 假定我們已經知道語詞“自然数”与“积”(或“商”)的意义, 讀者試为語詞“能被除尽”(divisible)下一个定义, 并且采用下列等值式的形式:

我們說 x 是可用 y 除尽的, 当且仅当...

用同样形式給語詞“平行”下一个定义; 为此我們要(在几何学範圍內)假設些什么語詞?

11. $\oplus \textcircled{A}$ 将下列各符号表达式翻譯成日常語言:

(a) $[(\sim p) \rightarrow p] \rightarrow p$,

(b) $[(\sim p) \vee q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$,

(c) $[\sim(p \vee q)] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$,

(d) $(\sim p) \vee [q \leftrightarrow (p \rightarrow q)]$.

讀者应特別注意, 在日常語言中分別最后三个表达式的困难。

12. 用邏輯符号表示下列語句:

(a) 如果不 p 或不 q , 那么, 就不是 p 或 q 。

(b) 如果 p 蕴涵: q 蕴涵 r ; 那么, p 而且 q 蕴涵 r 。

(c) 如果 r 可从 p 推出, 而且如果 r 可从 q 推出, 那么, r 可从 p 或 q 推出。

13. 給上面 11 題与 12 題中的所有語句函項, 各划一真值表。再, 假定将这些語句函項都解釋成語句(这表示甚么意思?), 并決定它們中哪些是真, 哪些是假。

14. 試用真值表的方法, 确证下列語句是真的:

- (a) $[\sim(\sim p)] \leftrightarrow p$,
 (b) $[\sim(p \wedge q)] \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$,
 $[\sim(p \vee q)] \leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$,
 (c) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,
 $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

語句(a)是双重否定定律, 語句(b)是摩根定律①, 語句(c)是分配律(对于加法的邏輯乘法与对于乘法的邏輯加法)。

15. 写出下列每一个語句的三个共軛語句(即逆語句、反語句、逆反語句):

(a) x 是一个正数蕴涵 $-x$ 是一个負数;

(b) 如果一个四边形是一个长方形, 那么, 可在它外边划一个外接圆。

在它們的共軛語句中, 哪些是真的?

試举出四个共軛語句全是假的这样的一个例子。

16. 根据函項“ $p \leftrightarrow q$ ”的真值表来解釋下列事实: 在一个語句中又包含了一些語句或語句函項, 如果我們用相等的語句去代換这些語句或語句函項, 那么, 这样代換以后所得到的新語句同原来那个整个語句是等值的。我們在 §10 中的某些命題与說法就是根据于这个事实的; 試指出 §10 中的这些命題与說明。

17. ④⑤ 考虑下面这两个語句:

(a) 从: 如果 p , 那么 q , 可推出: 如果 q , 那么 p ;

(b) 从: 如果 p , 那么 q , 可推出: 如果不 p , 那么不 q 。

假如以上两个語句是邏輯定律, 能否像应用逆反定律那样(参

① 这些定律是杰出的英国邏輯家摩根所創立的。

看 §14), 将这两个語句应用在数学的证明里? 从某一个給定的蘊函語句, 能推出哪些共軛語句? 从而看出: (a) 与 (b) 这两个語句都是眞語句这个假定能够成立嗎?

18. 試划出 17 題中 (a) 与 (b) 两个語句的眞值表, 来确立我們在 17 題中所作的結論。

19. 研究下面两个語句:

昨天是星期一这个事实, 蘊函今天是星期二;

今天是星期二这个事实, 蘊函明天是星期三。

根据 §12 所讲的假言三段論定律, 从上面两个語句中能推出什么語句?

*20. 作出前一个习题的完全的证明。应用上述假言三段論定律; 并应用代換規則与分离規則——此外, 再加上下列这个推理規則: 如果两个語句被接受为眞, 那么, 由它們所构成的合取式, 也可以被接受为眞。

(III) 同一理論

§16. 不屬於語句演算的邏輯概念; 同一概念

上章所讲的語句演算, 只是邏輯中的一个部分。无疑, 它是一个最根本的部分。當我們在邏輯的其他部分中, 要定义一个語詞与证明一条邏輯定律时, 都要应用到語句演算中的語詞与定律。至少就这点說, 語句演算是最根本的。然而, 語句演算本身却并不能形成其他科学的, 特別是数学的充分基础。在数学的定义, 定理与证明中, 我們經常会遇到屬於邏輯中的其他部分的概念。这些概念中的一部分, 我們将在本章与以后两章中予以討論。

在这些不屬於語句演算的概念中, 很可能, 同一或相等这个概

念是一个最重要的概念。这个概念出现在，例如，下面这样一些表达式中：

x 是与 y 同一的，

x 是与 y 相同的，

x 等于 y 。

这三个表达式的意义都是一样。为了简便起见，可以用

$$x=y$$

这个符号表达式来代换它们。

同样，我们可以将

x 与 y 不是同一的，

x 与 y 不相同，

写成下面这个公式

$$x \neq y.$$

有关这些表达式的一些普遍定律，构成为逻辑的一个部分，它叫做同一理论。

§17. 同一理论的基本定律

在关于同一概念的逻辑定律中，最根本的一个定律就是下面这个定律：

(I) $x=y$ ，当且仅当 y 所具有的每一个性质， x 都具有，同时， x 所具有的每一个性质， y 也都有 $\ominus\oplus$ 。

简单一些，我们也可以说：

$x=y$ ，当且仅当 x 与 y 的每一性质都是相同的。

这个定律还可以有其他，也许更显著，但是比较地不太正确的表述方式，例如：

$x=y$ ，当且仅当一切凡可以用于断定 x 与 y 其中之一的，

都可以用于断定其中之另一。

上面那个定理(I)是萊布尼茲首先提出来的^① (虽然所用的語詞略有不同), 因此它可以叫作萊布尼茲定律。它采取了等值式的形式, 因而, 在等值式的左边的 $x=y$, 可以用在等值式的右边的表达式去代換, 也就是說, 用不包含符号“=”的表达式去代換它。因而, 从形式方面看, 这个定律可以看作是对于符号“=”的定义, 并且萊布尼茲自己也是这样看的。(当然, 只有在这样的情况下, 即: 定律右边的那个表达式, 即“ y 所具有的每一个性质, x 都具有, 同时, …”的意义, 在我們看起来比符号“=”的意义还更清楚, 这时候我們說萊布尼茲定律是一个定义, 这句话才有意义; 参看 §11.)

从萊布尼茲定律, 可以得出下面这个非常重要的規則, 即: 如果在某一叙述範圍內, 一个具有等值式的公式, 例如

$$x=y$$

已經被假定或证明为真, 那么, 在这个叙述範圍內, 任何公式或語句中如果含有这个等值式的左边的表达式, 我們都可以用这个等值式的右边的表达式去代換它, 反之亦然: 例如, 用“ x ”去代換“ y ”, 或者, 相反地, 用“ y ”去代換“ x ”。这里, 需要指明, 如果“ x ”在一个公式中的好几个地方出現, 我們可以在有些地方用“ y ”去代換它, 在另一些地方又让“ x ”保留不变。而在 §15 中所讲的代入規則, 是不允許代換一部分而另一部分又保留不变的。这是这里所讲的这个規則和代入規則的根本差別。

从萊布尼茲定律, 我們还可以得出好些关于同一理論的定律。这些定律, 在各門科学中, 特別在数学中是常常要被应用的。下面, 我們將举出一些最重要的关于同一理論的定律, 和它們的证明

① 参看第 16 頁, §6 注①。

的大概步驟;以便借助于这些具体的例子說明:在邏輯領域与数学領域的推理之間,並沒有根本性的差別。

(II) 每一个事物都等于它自身, $x=x$ 。

证明:用“ x ”去代換“ y ”,从萊布尼茲定律,便可得到:

$x=x$, 当且仅当 x 所具有的每一个性质, x 都具有, 同时, x 所具有的每一个性质, x 都具有。

根据 §12 中所讲的重言定律 ($p \wedge p \leftrightarrow p$), 我們可将上面語句中“同时”以后的部分省掉, 而得:

$x=x$, 当且仅当 x 所具有的每一个性质, x 都具有。

又根据 §12 中所讲的同一律, (即是, 如果 x 具有某一个性质, 那么, x 就具有这个性质。)很显然, 上面等值式的右边的这个表达式总是真的。因而, 等值式的左边的表达式, 也总是真的。换言之, 我們证明了

$$x=x。$$

(III) 如果 $x=y$, 那么, $y=x$ 。

证明:用“ y ”代換萊布尼茲定律中的“ x ”, 同时, 用“ x ”代換萊布尼茲定律中的“ y ”, 我們得到:

$y=x$, 当且仅当 x 所具有的每一个性质, y 都具有, 同时, y 所具有的每一个性质, x 都具有。

讓我們把上面这个語句同萊布尼茲定律比較一下。它們都是等值式。两个等值式的右边的表达式都是合取式。这两个合取式的不同, 仅仅在于合取式中的两个部分的順序不同。根据 §13 所讲邏輯乘法的交換律, 这两个合取式是等值的。因而, 上面这个語句中左边的表达式, 即“ $y=x$ ”, 与萊布尼茲定律的左边的表达式“ $x=y$ ”, 也是等值的。

这样, 从 $x=y$, 就推出 $y=x$ 。这就是我們所要证明的。

(IV) 如果 $x=y$, 而且 $y=z$, 那么, $x=z$ 。

证明: 根据假设, 下面公式:

$$(1) x=y$$

与

$$(2) y=z$$

是真的。根据莱布尼兹定律, 由 (2) 我们得出: 一切可以用去断定 y 的, 都可以用去断定 z 。因而, 我们可以在 (1) 中用 “ z ” 去代换 “ y ”, 于是便得到:

$$x=z \ominus \ominus。$$

(V) 如体 $x=z$, 而且 $y=z$, 那么, $x=y$; 换言之, 等于同一事物的两个事物是互相相等的。

这个定律可以用类似上一个例子的办法去证明, 也可以不用莱布尼兹定律, 而从上面定律 (III) 与 (IV) 推出。

定律 (II), (III) 与 (IV) 分别地叫作同一关系的自反定律, 对称定律与传递定律。

§18. 事物之间的同一与指示词之间的 同一; 引号的用法

*虽然像下面这样一些表达式, 如:

$$x=y \text{ 或 } y \neq x$$

的意义是明白的, 但是, 有时候也有些误解。例如,

$$3=2+1$$

是一个正确的公式, 这是很显然的; 但是, 有些人却有点怀疑它的正确性。按他们的意见, 这个公式看起来好像是断定符号 “3” 与符号 “2+1” 是同一的, 这一点显然并不真, 因为这些符号的外形完全不同, 从而, 我们就不能说: 一切凡可以用于断定 “3” 的, 都可以用

于断定“ $2+1$ ”。（例如，“3”是一个单一的符号，而“ $2+1$ ”便不是。）

为了避免这一类怀疑，我們最好要弄清楚一个非常普遍而且重要的原則，任何語言的有效应用都要依靠这个原則。这个原則 是：任何时候，我們用一个語句去断定某个事物，我們就将这个事物的名称或指示这个事物的指示詞放在这个語句中，而不是将这个事物本身放在这个語句中。

只要一个語句所断定的对象不是一个字，一个符号，或更一般地說，不是一个語言中的一个表达式，那么，对上面那个原則的应用，是不会产生任何疑問的。例如，讓我們設想：我們前面有一块小小的藍宝石，我們說下面这句话：

这块宝石是藍色的。

在这个語句中，“这块宝石”这几个字合起来构成一个指示宝石这个东西的指示詞。大概沒有人会想到，要在这个語句中用那块宝石去換下“这块宝石”这几个字，即是說，从这个語句中把“这块宝石”这几个字挖掉，而在这几个字所在的地位放上一块宝石。因为，这样一来，我們就得出这样一个整体，它的一部分是一块宝石，而另一部分則是几个字；这个东西根本不是一个語言表达式，更說不上是一个真語句了。

但是，如果我們在一个語句中所断定的对象恰恰是一个字或一个符号，这个原則就常常会被違反。但是，即使在这一情形下，这个原則的应用仍然是必不可少的。因为，如果不这样，那么，虽然我們能得出一个語言的表达式，但是，这个表达式却根本沒有表达我們所想要表达的思想，而更多的时候，是得出一堆毫无意义的語詞的堆积。例如，讓我們考虑下面两个字或語詞：

好， 瑪丽；

很明显，第一个字是由六笔构成，而第二个字是一个女人的专名。

但是,讓我們設想,如果我們把这个無疑是正确的思想表示如下:

(I) “好”是由六笔構成。

(II) 瑪麗是一个专名。

这样,在我們說到这些字或詞的时候,我們就是用了这些字或詞本身,而不是用的这些字或詞的名称。如果我們再仔細研究一下(I)与(II),我們必得承认:(I)根本不是一个語句,因为一个語句的主詞,只能是一个名詞而不能是一个形容詞。(II)也許可以看作是一个有意义的語句,但是,無論如何,是一个假的語句,因为沒有一个女人是一个专名。

为了避免这些困难,也許我們可以这样假定,說:“好”与“瑪麗”用在(I)与(II)中的意义,不同于它們平常的意义:在(I)与(II)中,它們是表示它們自己的名称。如果把这个看法普遍化起来,我們就必須承认:任何字或語詞,有时候,都可以用作为它自己的名称;借用中古世紀的邏輯術語,我們可以說,在这种情形下,一个字或語詞是用于它的实质的指謂(suppositio materialis),即用于表示它自身,而不是用于它的形式的指謂(suppositio formalis),即用于它的平常的意义。这样一来,日常語言与科学語言中的每一个字或語詞,就至少都有了两个不同的意义:我們不必費事就会找到很多疑难不明的情形,那时候,我們會不知道究竟應該采用那一种意义。不能滿意于这种情况,因此,我們就要求确定这样一条規則,即:每一个表达式都必須(至少在书写上)和它的名称不同。

于是,就发生了这样的問題,我們如何来造成字、語詞和表达式的名称?为此,有許多不同的办法。最簡單的办法,是作出这样一个約定:在一个表达式外面加上引号。根据这个約定,在前面(I)与(II)中所想要表达的那个思想,就可以正确地、不含混地表示如下:

(I') “好”是由六笔構成。

(II') “瑪麗”是一个专名。

經過上面这些說明，因此，关于

$$3 = 2 + 1$$

这个公式的意义与正确性的一切可能的怀疑，就都可以解除了。这个公式包含指示某些数的符号，但是并不包含任何这些符号的名称。因此，这个公式对于数有所断定，而并不对于指示数的符号有所断定；3 与 $2+1$ 这两个数，很明显地，是相等的，因而，这个公式是一个真語句。当然，我們也可以把这个公式换成一个說及符号的等值語句，即，我們可以說：符号“3”与“ $2+1$ ”指示同一个数。但是，这并不意味着，这两个符号本身是同一的；因为，我們都知道，同一个事物——特别是，同一个数——可以有許多不同的指示詞。“3”与“ $2+1$ ”这两个符号，无疑是不同的，而这个事实可以用下面这个新的公式来表示，即：

$$“3” \neq “2+1”$$

这个新的公式，当然，和上面那个公式并沒有任何矛盾^① * $\Theta\Theta$ 。

§19. 算术与几何中的相等，和 它与邏輯同一的关系

在这里，我們將数与数之間的算术上的相等这个概念，一貫地

① 本书相当一貫地遵守了关于引号用法的这个約定。只在很少数場合下，为了照顾到傳統的用法才有一些例外。例如，当一个公式或語句被特別印成一行，或者，它出現在数学或邏輯的公式中，这时候我們对这个公式或語句就不用引号；有时，我們在一個表达式前面加上“所謂的”，“被称为”这样的短語，就也不再用引号。但是，即使上面这些場合，我們也采取一些相应的办法；我們常常在那些表达式前面加上冒号，而且这些表达式經常印成特殊的字体（如大小写体或斜体）（在中譯本中用不同的字体来区分）。可以注意到，在日常語言中，在有些不屬於上述引号用法的地方，也有用引号的；这类例子在我們这本书中也可以找到。

看作是邏輯的同一这个普遍概念的一个特殊事例。然而，这里要附加說明一下，有些数学家采取不同于我們的观点，他們认为算术中的“=”这个符号与邏輯同一这个符号是不相同的；他們认为：相等的数不必然是同一的。因此，他們将数与数之間的相等这个概念，当作一个算术特有的概念。在这点上，这些数学家抛棄了萊布尼茲定律的普遍形式，而只承认萊布尼茲定律某些只具有較小普遍性的結論，他們将这些結論列为数学所特有的定理。这些数学家所承认的，有 §17 中从(II)到(V)这几条定律，以及具有下列含义的一些定理，即：任何时候，凡 $x=y$ 而且 x 滿足某些仅由算术符号所构成的公式，那么， y 也滿足这些公式；例如，他們所承认的有下列这个定理：

如果 $x=y$ 而且 $x < z$ ，那么， $y < z$ 。

我們认为：这些数学家的这一看法，并没有什么特別的理論上的优越性；相反，在實踐上，它为算术系統的表述引起不少麻煩。因为，由萊布尼茲我們得到一个普遍規則，即：假定某一等值式成立，我們在任何地方能用这个等值式的右边的表达式去代換它的左边的表达式。这样一种代換在許許多多的論证中是必不可少的。而現在，如果抛棄了这个普遍規則，那么，就在每一个应用这种代換的地方，都有必要作一个特殊的证明 ⊙⊙。

用一个例子來說明这一点，讓我們考虑一組包含两个变項的等值式，例如：

$$\begin{aligned}x &= y^2, \\x^2 + y^2 &= 2x - 3y + 18.\end{aligned}$$

如果一个人想要用所謂代入法去解这組等式，那么，他必須作出一組新的等式，即，使第一个等式不动，而在第二个等式中用“ y^2 ”去代換全部“ x ”。但是問題就发生了：是否可以允許作这样一种变换

呢？也就是說，這一組新的等式是否與原來的這組等式相等呢？無疑，不論我們對於數與數之間的相等這個思想採取那一種概念，這裡的答案總是正面肯定的。但是，如果“=”這個符號被了解為指示邏輯的同一，而且，如果又接受了萊布尼茲定律，那末答案就可以很明顯。因為

$$x = y^2$$

這個設定，允許我們在任何地方用“ y^2 ”去代換“ x ”，反之亦然。相反的，如果不把符號“=”了解為指示邏輯的同一，不接受萊布尼茲定律，那麼，首先就要提出理由，說明為什麼作那樣的變換是允許的。即使提出這樣的理由沒有任何重大的困難，無論如何也將是冗長而令人厭煩的。

關於幾何中的相等的概念，情形就完全不同。如果我們說兩個幾何圖形（如兩綫段，或兩個角，或兩個多角形）是相等的或全等的，一般地我們的意思並不是想說它們是同一的。我們只是想表示：這兩個圖形有同樣的大小與形式，換言之——如果用一个不太正確的、形象的說法——如果將一個圖形移到另一個圖形上去，它們將完全相合。因此，例如，一個三角形可以有兩條，或甚至三條相等的邊，但是，這些邊顯然並不同一。另一方面，也有這樣的情形，例如，在一個等腰三角形中，底邊的垂綫與中綫就不只是幾何上的相等，而且根本是一條同一的綫段，因此這裡就不只是兩個圖形的幾何相等的問題，而是邏輯同一的問題。因此，為了避免混亂，在這些並不屬於邏輯同一的場合下，最好一貫避免用“相等”這個語詞，最好是說幾何上相等的圖形，而不說全等的圖形，用另一個不同的符號——一般也有人這樣做——例如，“ $\cong$ ”這個符號，去代替“=”。

§20. 数的量詞

利用同一这个概念，就可能确定数的量詞的准确意义。数的量詞，無論在內容和作用上，都与全称量詞和存在量詞很相近，它們也是屬於运算符，只是具有一种比較特殊的性质而已。这些数的量詞的表达式，例如：

至少有一个，或，至多有一个，或，恰恰有一个事物 x ，使得…，

至少有两个，或，至多有两个，或，恰恰有两个事物 x ，使得…，

以及等等，在这些表达式中，从外表看，好像包含了数学所特有的語詞，例如“一”，“两”，等等。然而，如果加以更确切的分析，可以看出这些表达式的內容(作为一个整体看)是屬於一种純粹邏輯性质的。因此，在

至少有一个事物滿足这个給定的条件

这一表达式中，“至少一”这几个字可以换成“一个”这个不定冠詞而并不会改变表达式的原意。而这个表达式：

至多有一个事物滿足这个給定的条件

与下面这个表达式：

对于任何 x 与 y ，如果 x 滿足这个給定的条件，而且，如

果 y 滿足这个給定的条件，那么， $x=y$

意义是相同的。

而下面这个語句：

恰恰有一个事物滿足这个給定的条件

与上面剛才所举的那两个語句的合取式是等值的，即：

至少有一个事物滿足这个給定的条件，而且至多有一个事物滿足这个給定的条件。

关于

至少有两个事物滿足这个給定的条件

这个語句, 我們把它了解为:

有 x 与 y , 而 x 与 y 都滿足这个給定的条件, 而且 $x \neq y$;
因而, 它和下面这个語句的否定式是等值的, 即:

至多有一个事物滿足这个給定的条件。

以同样的方式, 我們也可以說明属于这一范疇的其他种种表达式的意义。

下面, 作为例子, 再举几个含有数的量詞的算术上的眞語句:

恰恰有一个数 x , 使得 $x+2=5$;

恰恰有两个数 y , 使得 $y^2=4$;

至少有两个数 z , 使得 $z+2<6$ 。

邏輯中有一个部分, 其中确定有关量詞的种种普遍定律, 这个部分称作假变項的理論, 或叫作函項演算的理論, 虽然实际上它应当称作量詞演算。到目前为止, 这一理論主要是研究全称量詞与存在量詞, 而数的量詞一般还没有被顾到。

练 习

1. 证明 §17 中的(V); 試只用 §17 中的(III) 与 (IV) 这两条定律, 而不用萊布尼茲定律。

提示: 在定律(V)中, 下面两个公式:

$$x=z \text{ 与 } y=z$$

是被假定为眞的。根据定律(III), 将上面第二个公式中的两个变項互調, 再应用定律(IV)。

2. 試仅用 §17 中的定律(IV), 证明下面的定律:

如果 $x=y, y=z$ 而且 $z=t$, 那么, $x=t$ 。

3. 在 §17 的定律(III) 与 (IV) 中, 用“ $\neq$ ”去代換“ $=$ ”, 結果所

得到的語句, 都是真的嗎?

*4. 在 §18 中我們談到关于引号的用法所作的約定; 試根据这个約定, 決定下列語句中哪些是真的。

- (a) 0 是一个整数,
- (b) 0 是一个蛋圓形的符号,
- (c) “0”是一个整数,
- (d) “0”是一个蛋圓形的符号,
- (e) $1.5 = \frac{3}{2}$,
- (f) “1.5” = “ $\frac{3}{2}$ ”,
- (g) $2+2 \neq 5$,
- (h) “ $2+2$ ” $\neq$ “5”。

*5. 我們在一个語詞上加上引号, 就形成这个語詞的名称; 我們在一个語詞的名称上加上引号, 就形成这个名称的名称, 这样, 这个語詞外边就有两付引号。因此, 在下面三个表达式

約翰, “約翰”, ““約翰””

中, 第二个是第一个的名称, 而第三个是第二个的名称。

依次用上面的三个表达式去代換下面四个語句函項中的“ x ”, 便得到十二个語句。試指出这十二个語句中哪些是真的:

- (a) x 是一个人,
- (b) x 是一个人的名称,
- (c) x 是一个表达式,
- (d) x 是一个帶有引号的表达式。

* 6. 在 §9 中, 我們曾提出了許多在数学书籍中常見的条件語句的表述方式。当时我們曾指出, 在其中有些表述方式中, 我們所談的不是数、数的性质, 等等, 而是表达式(例如, 語句与語句函項)。从 §18 的討論, 我們知道, 这一类表述方式就需要应用引号;

試指出是这类表述方式, 并具体地在这类表述方式中的哪些地方需要加上引号。

*7. ⑨⑩根据前面所說的在对于事物有所断定的語句中应用事物的名称这一普遍原則, 現在我們可以給 §12 中倒数第二句 (即: “正如带有普遍性质的算术定理……,” 这一句) 以一些批評。我們知道, 在算术中出現的变項, 是代表数的名称的。在語句演算中出現的变項, 是代表語句的名称呢? 还是代表語句本身呢? 因此, 如果要求更确切一点的話, 我們能否說, 語句演算的定律对于語句与語句的性质有所断言?

8. 一个三角形有 a, b, c 三边; h_a, h_b, h_c 分別是垂直于 a, b, c 三边上的高, m_a, m_b, m_c 分別是 a, b, c 三边的中綫, s_a, s_b, s_c 分別是三个角的平分綫。

假定这个三角形是二等边三角形 (a 是底边, b 与 c 两边相等), 在上面所說的那十二条綫中, 哪些是全等的 (即, 几何意义上的相等); 哪些是同一的? 将答案作成公式的形式, 用符号 “ $\cong$ ” 表示全等, 用符号 “ $=$ ” 表示同一。

再假定这个三角形是三等边三角形, 試答复上面的問題。

9. 說明下列表达式的意义:

- (a) 至多有两个事物滿足这个給定的条件;
- (b) 恰恰有两个事物滿足这个給定的条件。

10. 决定下面語句中哪些是真的:

- (a) 恰恰有一个数 x , 使得 $x+3=7-x$;
- (b) 恰恰有两个数 x , 使得 $x^2+4=4x$;
- (c) 至多有两个数 y , 使得 $y+5<11-2y$;
- (d) 至少有三个数 z , 使得 $z^2<2z$;
- (e) 对于任何数 x , 恰恰有一个数 y , 使得 $x+y=2$;

(f) 对于任何数 x , 恰恰有一个数 y , 使得 $x \cdot y = 3$ 。

11. 如何用数的量詞来表示下列事实, 即: 公式

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

具有两个根?

12. 什么数 x 满足下面的語句函項:

恰恰有两个数 y , 使得 $x = y^2$

在上面語句函項中, 哪个是自由变項, 哪个是約束变項? * 数的量詞是否也約束变項? *

(IV) 类的理論

§21. 类与它的元素

除了个别的事物(简称个体)以外, 邏輯还研究事物的类(class of things)③④。在日常生活与数学中, 类常常叫作集合(set)。例如, 算术常常研究数的集合; 在几何中, 我們对于单个的点的兴趣, 沒有像对于点的集合那样大(即是說, 沒有像对于几何位形[configuration]的兴趣那样大), 个体的类叫作一級类。在我們的研究中, 較少地也要碰到二級类。二級类是这样的类, 它不是由个体所构成, 而是由一級类构成的。有时, 我們甚至要研究三級类、四級类…。在本书中, 我們差不多只是研究一級类, 只是在 §26 中, 例外地我們將談到二級类。但是, 我們所讲的, 实际上可以无需作甚么改变就能应用于任何級的类。

为了分別个体与类(并分別各級的类), 我們要用不同文字的、不同形状的字母来作为变項。习惯上, 往往用英文的小写字母表示个体(例如, 个别的数), 用英文的大写字母表示这些个体的类。在初等几何中, 所采取的是一个相反的办法, 大写字母表示点, 而

小写字母(如英文或希腊文的小写字母)則表示点的集合。

在邏輯中，研究类这个概念和它的一般性质的这个部分，叫作类的理論。有时候，这个理論也作为一門独立的数学学科来研究，叫作一般集合論。^①

在类的理論中，带有根本性质的是下面的这些表达式，如：

事物 x 是类 K 中的一个元素，

事物 x 属于类 K ，

类 K 包含事物 x 作为一个元素。

我們將这些表达式看作都是相同意义的，并为了簡單起見，用下面这个公式替代它們：

$$x \in K$$

这样，如果 I 是所有整数的集合，那么， $1, 2, 3, \dots$ 这些数是这个集合的元素，而 $\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \dots$ 这些数，不屬於这个集合。因此，公式：

$$1 \in I, 2 \in I, 3 \in I, \dots$$

是真的，而公式

$$\frac{1}{2} \in I, 2\frac{1}{2} \in I, \dots$$

是假的。

§22. 类和包含一个自由变項的語句函項

讓我們来研究一个包含一个自由变項的語句函項，例如：

① 在布尔的著作中，已經开始研究类的理論，或者，更准确一点說，已經开始研究到我們在下面称之为类的演算的那一部分(参看第 16 頁 §6 注①)。集合論，作为一个独立的数学学科，它的实际的創始者是偉大的德国数学家康脫 (G. Cantor, 1845—1918)；特别是，关于权的等值、基数、无限和級等等这些概念的分析(我們在本章和以下各章要討論到它們)，應該归功于康脫。康脫的集合論，是正在迅速发展中的数学理論之一。集合論的概念与思想，已經渗透到几乎所有的数学分支中，而且已經到处产生出极有启发性的与创造性的影响。

$$x > 0$$

如果我們在这个語句函項前面，加上

(I) 这个由所有数 x 构成的集合，使得
我們就得到下面这个表达式：

这个由所有数 x 构成的集合，使得 $x > 0$ 。

这个表达式指示一个确定的集合，即是說，指示那个由所有的正数所构成的集合。这个集合以，而且仅仅以那些滿足这个函項的数为它的元素。如果我們用 P 表示这个集合，这个函項就同

$$x \in P$$

等值。

我們可以把类似的办法用于任何别的語句函項。用这个办法，在算术中，我們可以得到各种关于数的集合，例如，可以得到由所有負数所构成的集合，或者由所有大于 2 而小于 5（即滿足函項“ $x > 2$ 与 $x < 5$ ”）的数所构成的集合。这个办法在几何中也起重要的作用，特别是在定义各种新的几何图形时；例如，一个球形的曲面就定义为一个由这个空間的所有的点所构成的集合，这些点与一个給定的点有确定的距离。在几何中，习惯上我們用“这些点的軌迹”一詞来代替“所有点的集合”一詞。

現在，我們將給予上面所讲的办法一个普遍的形式。在邏輯中，我們肯定：对于每个只包含一个自由变項（如“ x ”）的語句变項，恰恰有一个相应的类，这个类以，而且仅仅以那些滿足这个函項的事物 x 为它的元素。将下面这个表达式（类的理論中的基本的表达式之一）：

(II) 这个由所有 x 构成的类，使得…

加在那个語句函項的前面，我們就得出一个指示那个类的指示詞。又，如果我們用一个单一的符号，如 C ，来表示所說的这个类，

那么，

$$x \in C$$

这个公式——对于任何 x 来说——和原来的那个語句函項是等值的。

因此，我們知道，任何只包含 x 作为它的唯一的自由变項的語句函項，都可以变换成一个具有

$$x \in K$$

这样形式的等值的函項，在这个函項中 K 表示一个指示一个类的常項。因此，我們可以把 $x \in K$ 这个公式看作是只包含一个自由变項的語句函項的最普遍的形式。

前面 (I) 与 (II) 这两个短語有时也用符号表达式来代替。例如，我們可以用

$$C_x$$

这样一个符号来代替它們。

*現在，讓我們看下面这个表达式：

1 属于那个由所有 x 构成的集合，使得 $x > 0$ 。

这个表达式用符号写出来，就是

$$1 \in C(x > 0)。$$

这个表达式，很明显，是一个語句，而且甚至是一个真語句。它用一个更复杂的形式来表示

$$1 > 0$$

所表示的思想。因此，它不能包含任何自由变項，而在它之中所出現的变項 x 必定是一个約束变項。但是另一方面，因为我們在它里面看不到任何量詞，因此我們可以得出結論：(I) 或 (II) 这些短語一定起着量詞的作用，即是說，能够約束变項。因此，(I) 与 (II) 那样的短語，也应当看作是一种运算符（参看 §4）。

应当附帶說明一下，在一个除了包含变項“ x ”以外还包含其他自由变項的語句函項前面，我們常常也加上一个像(I)与(II)这样的运算符。(在几何中，凡是应用这类运算符的場合，情形差不多都是这样。)这样得出的表达式，例如：

这个由所有的数 x 所构成的集合，使得 $x > y$ ，就不表示任何确定的类。这样的表达式，是 §2 中所說的指示函項，也就是說，如果我們用常項去代換其中的自由变項(但不代換“ x ”)，例如，在上面例子中，用“0”去代換“ y ”，那么，这个表达式就变成指示类的指示詞*。

我們常說：包含一个自由变項的語句函項，是表示某一种性质；这种性质是那些，而且只是那些滿足这个語句函項的事物所具有的(例如，“ x 是可被 2 除尽的”这个語句函項表示数 x 的一种性质，即：可被 2 除尽这种性质，或，是偶数这种性质)。相当于这个函項的类，包含，并且只包含具有这个性质的一切事物作为它的元素。这样，对于事物的每一个性质，就有一个唯一的确定的类与之对应。而且，反过来，对于每一个类，也有一个唯一为这个类的元素所具有的性质，也就是說，从屬於这个类这样一种性质，与这个类对应。因此，許多邏輯学家认为：根本不需要分別类这个概念和性质这个概念。换言之，一种專門的“性质論”是不必要的——有了类的理論就完全足够了。

作为这个看法的一个应用，我們可以給萊布尼茲定律作一个新的表述。§17 中的萊布尼茲定律包含了“性质”这个語詞，在下面这个和它完全等值的表达式中，我們代之以“类”这个語詞：

$x = y$ ，当且仅当每一个包含 x 与 y 中的任一个作为元素的类，也包含另一个作为元素。

从萊布尼茲定律的这个新的表述中，我們能够看出：同一概念

可以用类的理論来加以定义 $\ominus\oplus$ 。

§23. 全类与空类

上面我們知道，相应于任何只包含一个自由变項的語句函項，总有一个由滿足这个語句函項的一切对象所构成的类。这一点也可以用于下面两个特殊的函項：

$$(I) \quad x = x, \quad x \neq x.$$

很显然，任何事物都滿足第一个函項(参看 §17)。因此，和它相应的类

$$C(x = x),$$

包含一切个体作为元素。我們將这个类叫作全类 (universal class)，并用符号“ $\forall$ ”(或“1”)来表示它。另一方面，却沒有任何事物滿足第二个函項。因此，和它相应的类

$$C(x \neq x),$$

我們叫作空类 (null class 或 empty class)，并用“ $\wedge$ ”或“0”表示它。空类不包含任何元素 $\ominus\oplus$ 。現在，我們可以用具有

$$x \in K$$

这种形式的等值的函項去代換(I)，即得出

$$(II) \quad x \in \forall, \quad x \in \wedge,$$

任何个体都滿足第一个公式，但沒有任何个体滿足第二个公式。

在一門特殊的数学理論中，我們最好精确地指出，甚么是这个理論中的个体，而不用一般的个体这个邏輯的概念。这样，由这些个体所构成的类将可以用“ $\forall$ ”来表示，并称之为这个数学理論的論域 (universe of discourse)。例如，在算术中，由所有的数所构成的类，就是它的論域。

*应当着重指出， $\forall$ 是所有的个体所构成的类，但是， $\forall$ 却不包

含所有可能的事物，因而，也不包含一級类、二級类…作为它的元素。至于一个包含所有的可能事物的类是否存在，并且更一般地說，我們是否可以考虑不屬於一个特定的級而既包含个体又包含各級的类作为它的元素的“不齐”的类(inhomogeneous class)——这一点本身是一个問題。

这个問題和近代邏輯中一个最困難的問題密切有关，也就是說，是和所謂罗素諄論以及邏輯类型理論(theory of logical type)密切有关的。^①关于这个问题的討論，将超出本书預定的范围。这里我們只需要指出，即使在整個数学中也很少需要考虑“不齐”的类（只有在集合的一般理論中是例外），至于在其他科学中这种需要就更少了。^{*③④}

§24. 类与类間的基本关系

在两个类 K 与 L 之間，可以有各种不同的关系。例如，可以有这样的情形：类 K 的每一个元素同时又是类 L 的一个元素。在这种情形下， K 类就叫作 L 类的子类，或者說它被包含于 L 类中，或者說 K 类对于 L 类有包含于的关系；而就 L 类說，則是 L 类包含 K 类作为它的一个子类。这种情形，可以简单地用下面任何一个公式来表示：

$$K \subset L \text{ 或 } L \supset K.$$

当我们說 K 是 L 的子类，这并不排除 L 也是 K 的子类这种可能性。换言之， K 与 L 可以互为子类，并从而， K 与 L 的所有的元素

① 罗素所提出的邏輯类型这个概念，是与类的級这个概念密切相关的；甚至邏輯类型这个概念可以看作是类的級这个概念的普遍化。邏輯类型这个概念，不仅涉及类，而且也涉及到別的东西，例如，涉及到我們在下一章所要討論的关系。邏輯类型这个理論，在罗素的《数学原理》一书中得到了系統的发展。（参看第 16 頁 §6 注①）

都是共同的。在这个情形下, 从(以下要讲到的)一条关于类的理論的定律, 就可以推出: K 与 L 是同一的。但是, 如果逆关系不成立, 即是說, 如果 K 类的每个元素都是 L 类的元素, 而 L 类的每个元素并不都是 K 类的元素, 那么, K 类就叫作 L 类的真正子类 (proper subclass), 或叫作 L 类的部分 (part)。例如, 由所有整数构成的集合是由所有有理数构成的集合的真正子集合, 又例如, 一条綫中的一段是这条綫的部分。

如果在两个类 K 与 L 中, 至少有一个元素是共同的, 而且如果 K (或 L) 中所包含的有些元素不是 L (或 K) 中的元素, 那么, 我們就說, K 类与 L 类相交。如果两个类至少都各有一个元素 (即是說, 它們都不是空类), 同时, 如果它們沒有一个元素是共同的, 我們就說, 它們是不可兼的, 或者說不相交的 (mutually exclusive 或 disjoint)。例如, 一个圓与通过圓的直綫是相交的, 而一个圓与一条距离圓心大于圓的半徑的直綫, 却是不相交的。由一切正数构成的集合与由一切有理数构成的集合相交, 但是正数的集合与負数的集合是不可兼的。

关于上面所讲的这些类与类之間的关系, 讓我們举几个有关这些关系的定律的例子:

对于任何类 K , $K \subset K$ 。

如果 $K \subset L$ 而且 $L \subset K$, 那么, $K = L$ 。

如果 $K \subset L$ 而且 $L \subset M$, 那么, $K \subset M$ ②。

如果 K (不空类) 是 L 的一个子类, 而且如果 L 类与 M 类是不相交的, 那么, K 类与 M 类是不相交的。

上面第一个公式, 就叫作包含的自反定律, 或叫作类的同一律。上面第三个公式, 就叫作包含的傳遞定律。第三个公式和第四个公式 (以及其它类似的公式一起), 形成一組命題, 統称为直言三

段論定律(laws of the categorical syllogism)。

就包含这个概念說，全类与空类的特性可用下面定律表示：

对于任何类 K , $\bigvee \supset K$ 而且 $\bigwedge \subset K$ 。

这个定律，特别是就它的涉及空类的第二部分(即 $\bigwedge \subset K$)說，許多人都觉得它有些諄謬。为了要证明这个定律中的第二部分，讓我們研究下面这个蘊函式：

如果 $x \in \bigwedge$ ，那么， $x \in K$ 。

無論我們用什么去代換“ x ”与“ K ”，这个蘊函式的前件都将是假的；因而这个蘊函式是真的(如象一些数学家有时說的，这个蘊函式是“空虛地”被滿足的)。这样，我們就可以說：凡是类 $\bigwedge$ 的元素，必同时也是类 K 的元素。因此，根据包含的定义，就可以得出 $\bigwedge \subset K$ 。同样，用类似的方法，我們也可以证明这个定律的第一部分(即 $\bigvee \supset K$)。

很容易看出，任何两个类之間必定具有上面所說的那些关系之一。这一点表示为下面这个定律：

如果 K 与 L 是任意的两个类，那么，或者 $K=L$ ，或者 K 是 L 的真正子类，或者 L 是 K 的真正子类，或者 K 与 L 是相交的，或者 K 与 L 是不相交的； K 与 L 之間不能同时具有两种上面所說的关系。

为了对这个定律有一个清楚的、直觉的了解，最好将类 K 与 L 設想为几何图形，同时，想像这两个图形相互間所有可能的位置。

以上这些在这一节里所已經討論到的关系，可以叫作类与类間的基本关系。^①

整个的旧的傳統邏輯(參看 §6)几乎可以完全簡化为类与类

① 法国数学家杰尔哥納(J. D. Gergonne)是第一个人开始对这些关系作了全面徹底的研究。

之間的基本關係的理論。即是說，簡化為類的理論中的一個小部分。從外表看，這兩種理論的不同在於：在舊邏輯中，類這個概念並不顯明地出現。在舊邏輯中，例如，不說：馬類包含於哺乳動物類，而習慣於說：所有的馬都有哺乳動物這個性質，或者簡單地說：所有的馬都是哺乳動物。傳統邏輯中的最重要的定律是一些直言三段論定律，它們完全相當於我們上面所指出的那些關於類的理論的定律（這些定律我們沿用舊名稱作直言三段論定律）。例如，我們上面所講的第一條三段論定律（即：如果 $K \subset L$ 而且 $L \subset M$ ，那麼 $K \subset M$ ），就相當於舊邏輯中的

如果每一 M 都是 P ，而且每一 S 都是 M ，那麼，每一 S 都是 P 。

這是傳統邏輯中的一條最有名的定律，普通稱作三段論定律中的 Barbara 式。

§25. 類的運算

現在我們要來研究一下某些演算，運用這些演算於已定的類，便可產生新的類。

給定兩個類 K 與 L ，我們就能形成一個新的類 M ，而 M 包含、而且僅僅包含那些至少屬於 K 與 L 兩者之一的事物。我們可以說， M 類是由 K 類的元素再加上 L 類的元素而成的。這個運算叫作類的加法； M 類叫作 K 類與 L 類的和（sum 或 union）。

K 與 L 的和，可用符號表示如下：

$$K \cup L \text{ (或 } K + L \text{)}.$$

我們還可以形成另外一個新的類 M ， M 的元素是，並且只是那些既屬於 K 又屬於 L 的事物。這個關於 K 類與 L 類的運算，叫作類的乘法。而這個 M 類，叫作 K 類與 L 類的積或交（product）。

或 intersection)。K 类与 L 类的积, 可以用符号表示如下:

$$K \cap L \quad (\text{或 } K \cdot L).$$

这两个运算在几何中常常被应用; 有时候, 可以很方便地用它们去定义新的几何图形。例如, 假设我們已經知道一对互补角的意义是什么, 那么, 半平面——即直角——就可以被定义为两个互补角之和。(这里, 一个角应了解为一个角域, 即了解为平面的一个部分, 其边綫是两条半綫, 称为这个角的股)。又, 如果我們用一个任意的圓和一个其頂点位于这个圓的圓心的角, 那么, 这两个图形的交就是一个叫做圓扇形的图形。

讓我們再从算术范圍中举两个例子: 由所有正数构成的集合与由所有負数构成的集合之和, 就是所有不是 0 的数的集合; 由所有偶数构成的集合与由所有素数构成的集合之交, 就是那个只具有数 2 作为它的唯一元素的集合。2 这个数是唯一的偶素数。

类的加法与乘法遵守着許多定律。其中有一些定律和算术中的关于数的加法与乘法的定理完全类似——正是由于这个理由, 我們才选择“加法”与“乘法”这两个語詞来称呼上面这些类的运算。作为一个例子, 我們可以提出关于类的加法与乘法的交換定律和結合定律:

对于任何类 K 与 L, $K \cup L = L \cup K$ 而且 $K \cap L = L \cap K$,

对于任何类 K, L 与 M, $K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap M$,

而且 $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup M$ 。

如果我們用符号“+”与“·”分別代換符号“ $\cup$ ”与“ $\cap$ ”, 上述定律和相应的算术定理之間的类似, 就变得十分明显。

然而, 其他的定律就和算术的定理頗有不同。下面的重言定律就是一个显著的例子。

对于任何类 K, $K \cup K = K$ 而且 $K \cap K = K$ 。

我們只要思考一下 $K \cup K$ 与 $K \cap K$ 的意义，上面这个定律就很明白。例如，我們在 K 类的元素上加上同一个类 K 的元素，事实上，我們並沒有加上任何东西，因而其結果仍然是同一个类 K 。

我們还要提出另外一个演算，它同加法与乘法的演算不同，在于它可以只运用于一个类，而不是运用于两个类。这个演算就是：由一个給定的类 K ，我們可以形成一个 K 类的余类 (complement of the class K)，即是，可以形成一个由所有不屬於 K 类的事物构成的类。 K 类的余类，用符号表示，就是：

$$K'.$$

例如，如果 K 是由所有整数构成的集合，那么，所有的分数与无理数都屬於集合 K' 。

关于余类的定律，与确立余类与以前所讲的那些概念的关系的定律，我們举下面这两个公式为例：

$$\text{对于任何类 } K, \quad K \cup K' = V.$$

$$\text{对于任何类 } K, \quad K \cap K' = \Lambda.$$

第一个公式叫作类的理論方面的排中律，第二个公式叫作类的理論方面的矛盾律 $\ominus\oplus$ 。

类与类間的关系与上面已經讲过的类的运算，以及全类与空类的概念，都由类的理論中的一个特殊部分所加以研究；由于有关这些关系与运算的定律，都具有一些简单的、和算术定理相类的公式的性质，因此类的理論中的这一部分，叫作类的演算。

§26. 等数类，一个类的基数，有穷类与无穷类；

算术作为邏輯的一个部分

*在作为类的理論的研究对象的其他概念中，有一組概念值得我們特別注意。这組概念包括：等数类的概念，类的基数的概念，

有穷类与无穷类的概念。这些概念都是相当麻烦的概念，这里只能粗淺地談一談。

作为两个等数的类或相等的类的例子，我們可以考慮一下右手手指这个集合与左手手指这个集合。这两个集合是等数的，因为我們可以将左手手指与右手手指作成这样的許多对：(i)每个手指只属于一对。(ii)每对中只包含一个左手手指与一个右手手指。在同样的意义下，由多角形的所有顶点构成的集合，多角形的所有的边构成的集合与多角形的所有的角构成的集合，也是等数的。以后，在 §33，我們將可以給等数类这个概念下一个确切的一般性的定义 $\ominus\ominus$ 。

現在讓我們來考慮一个任意的类 K ；无疑的，存在着这样一个性质，这个性质只属于所有同 K 等数的类，而不属于任何其他类。(也就是說，“同 K 等数”这样的一个性质。)这个性质，就叫作 K 类的基数，或 K 类的元素的数目，或 K 类的数。这也可以用更简单更确切的，但也許更抽象的办法来表示： K 类的基数，就是由所有同 K 类等数的类构成的那个集合。由此，可以得出，当且仅当 K 类与 L 类是等数的，那么， K 类与 L 类具有同一的基数。

从类的元素的数目着想，类可以分为有穷类与无穷类。在有穷类中，我們又分別：恰恰包含一个元素的类，恰恰包含两个元素的类，恰恰包含三个元素的类…。这些語詞，在算术的基础上可以很容易地給它們下定义。令 n 为一个任意的自然数(即，非負数的整数)，我們就可以說：如果 K 类同由所有小于 n 的自然数构成的类是等数的，那么， K 类是由 n 个元素构成的。詳細点說，如果一个类同由所有小于 2 的自然数所构成的类是等数的，即是說，一个类同由数 0 与 1 所构成的类是等数的，那么，这个类就是由两个元素构成。同样，如果一个类同由 0、1 与 2 构成的类是等数的，

那么，这个类就是由三个元素构成的。普遍地說，如果存在着一个自然数 n ，而 K 类是由 n 个元素构成的，那么，我們說 K 类是有穷类；反之，是无穷类。

但是現在，我們已經認識到，还有另一种定义的办法。我們剛才所考虑的所有这些語詞，都可以用純粹邏輯的語詞来加以定义，而完全不需要应用任何屬於算术范围的表达式。例如，我們可以說：如果 K 类适合下面两个条件，(i)有一个 x 而 $x \in K$ ，(ii)对于任何 y 与 z ，如果 $y \in K$ 而且 $z \in K$ ，那么， $y = z$ （这两个条件也可以換成一个单一的条件，即：恰恰有一个 x ，使得 $x \in K$ ，参看 §20），那么， K 类是由恰恰一个元素构成的。类似地，我們可以定义这些表达式：“ K 类是由两个元素构成的”，“ K 类是由三个元素构成的”，…等等。当我们着手去定义“有穷类”与“无穷类”这些語詞时，問題就变得困难得多。但是，即使是这些語詞，我們也已經能够成功地用純粹邏輯的語詞来对它們下定义（参看 §33）。因此，我們上面所討論的所有这些概念，都已經包括在邏輯的范围之内。

这一事实产生了一个极重要、极令人注目的結果；因为現在我們知道，数的概念本身，以及同样地，其他一切算术概念，都是能够在邏輯范围内加以定义的。事实上，我們可以很容易确立那些表示个别的自然数（如“0”，“1”，“2”，……）的符号意义。例如，数 1 就可以定义为这样一个类的元素的数目，这个类是由恰恰一个元素构成的。（这样一个定义似乎是不正确的，似乎犯了循环定义的錯誤，因为被定义者“一个”在定义者中出现；但是事实上，这里并没有錯誤，因为“这个类是由恰恰一个元素构成的”这个表达式，应当作为一个整体来看，而这个整体的意义，在前面已經有了定义。）同样，我們也不难定义自然数的一般概念：一个自然数是一个

有穷类的基数。此外，我們还能定义一切有关自然数的运算，还能引进分数、負数、无理数以扩大数的概念，而无需在任何地方超出邏輯的界限。更进一步，还可以仅仅根据邏輯定律来证明一切算术定理（但附有一个条件，即：在这个邏輯定律的系統中必須首先加入一条叫作无穷公理的定律；这条定律断定：有无穷多的不同的事物。这条定律直觉地看来，不像其他邏輯定律那样自明）^{③④}。但是这整个的理論构造是非常抽象的，不容易給予通俗的說明，也不适用于对算术的初步讲解。因此在我們这本书中，我們也不想采取这个概念；我們把数看作是个体，而不看作是性质或关于类的类。但是，已經证明我們有可能将整个算术（包括建筑在算术之上的代数，分析等等，）当作純粹邏輯的一个部分推演出来，单单这个事实本身，就足以称作是近代邏輯研究的最偉大成就之一。^{①*}

• 练 习

1. 令 K 是由所有小于 $\frac{3}{2}$ 的数构成的集合，試問下面哪些公式是真的：

$$0 \in K, 1 \in K, \frac{2}{3} \in K, \frac{3}{4} \in K, \frac{4}{5} \in K?$$

2. 研究下面四个集合：

(a) 由所有正数构成的集合，

(b) 由所有小于 3 的数构成的集合，

(c) 由所有数 x 构成的集合，使得 $x+5 < 8$ ，

(d) 由所有数 x 构成的集合， x 滿足語句函項“ $x < 2x$ ”。

① 这个領域中的一些基本观念應該归功于弗萊格（參看第 16 頁 §7 注②）；弗萊格在他的重要的书：《算术基础》（Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884）中，第一次發揮了这些思想。弗萊格的这些思想，又在罗素与怀特海的《数学原理》这本书中得到了系統的、彻底的实现。（參看第 16 頁 §6 注①）

在上面这些集合中, 哪些是同一的, 哪些是不同的?

3. 由所有这样的点构成一个集合, 这些点在空間中与一个定点的距离不超过一个給定的綫段的长度。在几何中, 我們將这个集合叫作什么?

4. 令 K 与 L 为两个同心圓, K 的半徑小于 L 的半徑。在 §24 中所討論的哪些关系, 存在于 K 与 L 之間? 同样的关系是否也存在于 K 与 L 的圓周之間?

5. 划两个正方形 K 与 L , 使 K 与 L 之間有下面的关系之一:

- (a) $K=L$,
- (b) 正方形 K 是正方形 L 的一个部分,
- (c) 正方形 K 包含正方形 L 作为一个部分,
- (d) 正方形 K 与正方形 L 相交,
- (e) 正方形 K 与正方形 L 不相交,

如果 K 与 L 全等, 上面哪些关系就不能成立? 如果不考虑正方形, 而只考虑正方形的周长, 上面有哪些問題就不能成立?

6. 令 x 与 y 是两个任意数, 使得 $x < y$ 。我們知道, 由所有不小于 x 又不大于 y 的数构成的集合, 就叫作以 x 与 y 为端点的区間; 这个区間用符号“ $[x, y]$ ”来表示。

下面公式中哪些是正确的:

- (a) $[3, 5] \subset [3, 6]$,
- (b) $[4, 7] \subset [5, 10]$,
- (c) $[-2, 4] \supset [-3, 5]$,
- (d) $[-7, 1] \supset [-5, -2]$?

在下面这些区間之間有哪些根本关系:

- (e) $[2, 4]$ 和 $[5, 8]$,
- (f) $[3, 6]$ 和 $[3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}]$,

(g) $[1\frac{1}{2}, 7]$ 和 $[-2, 3\frac{1}{2}]$ 。

7. 下面这个语句(它的结构与 §24 讲过的三段论定律相同)是真的吗:

如果 K 与 L 不相交, 而且 L 与 M 不相交, 那么, K 与 M 不相交?

8. ③③ 将下列公式翻译成日常语言:

(a) $(x=y) \leftrightarrow \underset{K}{A}[(x \in K) \leftrightarrow (y \in K)],$

(b) $(K=L) \leftrightarrow \underset{x}{A}[(x \in K) \leftrightarrow (x \in L)].$

§22 与 §24 中的哪些定律, 可以用上面这些公式去表达? 在 (b) 这个等值式的两边, 需要作甚么改变, 才可以得到一个关于符号“ $\subset$ ”或“ $\supset$ ”的定义?

9. 令 ABC 是一个任意的三角形, BC 边上有任意一点 D 。三角形 ABD 与三角形 ACD 之和形成什么图形? ABD 与 ACD 之积又形成什么图形?

将你的答案用公式表示出来。

10. 试将一个任意正方形表示为:

(a) 两个梯形的和,

(b) 两个三角形的交。

11. 下面的哪些公式是真的(比较上面第 6 题):

(a) $[2, 3\frac{1}{2}] \cup [3, 5] = [2, 5],$

(b) $[-1, 2] \cup [0, 3] = [0, 2],$

(c) $[-2, 8] \cap [3, 7] = [-2, 8],$

(d) $[2, 4\frac{1}{2}] \cap [3, 5] = [2, 3].$

上面有些公式是假的, 在那些假的公式中, 将“ $=$ ”右边的表达式加以改正, 使假公式变成一个正确的公式。

12. 令 K 与 L 是两个任意的类。如果 $K \subset L$, 那么, $K \cup L$ 与

$K \cap L$ 是等于甚么类？詳細說明： $K \cup V$, $K \cap V$, $\wedge \cup L$ 与 $\wedge \cap L$ 等于甚么类？

提示：在答复第二个問題时，應該想到 §24 关于 $\vee$ 与 $\wedge$ 的定律。

13. 試证明：任何类 K , L 与 M 滿足下面公式：

(a) $K \subset K \cup L$ 而且 $K \supset K \cap L$,

(b) $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$ 而且 $K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cup M)$,

(c) $(K')' = K$,

(d) $(K \cup L)' = K' \cap L'$ 而且 $(K \cap L)' = K' \cup L'$ 。

公式(a)叫做(类的加法与乘法的)簡化定律；公式(b)的上半，叫作(关于加法的类的乘法的)分配律，公式(b)的下半，叫作(关于乘法的类的加法的)分配定律。公式(c)是两重余类的定律；公式(d)是类的理論方面的摩根定律。^① 上面的定律中哪些和算术定理相当？

提示：例如，为了要证明公式(d)的第一部分，只要指出 $(K \cup L)'$ 与 $K' \cap L'$ 是由完全相同的元素构成就够了(参看 §24)。为了这个目的，我們必須应用 §25 的定义，弄明确甚么时候一个事物 x 属于类 $(K \cup L)'$ ，甚么时候 x 属于 $K' \cap L'$ 。

*14. ③③ 在 §12, §13 与第(II)章的习题 14 中所讲的語句演算定律，与在 §24, §25 以及前面 13 題中所讲的类的运算的定律之間，在結構上存在着极大的相似(它們名称的类似就指出了这点)。詳細說明甚么地方相似，并且对这种現象給予普遍的說明。

在 §14 中，我們知道了語句演算的逆反定律；試作出类的运算方面的类似的定律。

① 参看第 50 頁第(II)章练习 14 的注①。

15. 用 §22 中所引入的符号:

$\mathbf{C}_x$

我们可以将两类之和的定义写成:

$$K \cup L = \mathbf{C}_x [(x \in K) \vee (x \in L)];$$

但是, 也可以用通常的等值式的形式(不用 $\mathbf{C}_x$ 这个符号)将这个定义表示如下:

$$[x \in (K \cup L)] \leftrightarrow [(x \in K) \vee (x \in L)].$$

试同样用这两种办法来表示全类的定义、空类的定义、两类之积的定义、一类的余类的定义。

*16. 有没有这样一个多边形, 它的所有边的集合与它的所有对角线的集合是等数的?

*17. 只用逻辑范围中的语词, 作出下列表达式的定义:

(a) K 类是由两个元素构成的,

(b) K 类是由三个元素构成的。

*18. 考虑下列三个集合:

(a) 所有大于 0 又小于 4 的自然数的集合,

(b) 所有大于 0 又小于 4 的有理数的集合,

(c) 所有大于 0 又小于 4 的无理数的集合,

哪些是有穷集合, 哪些是无穷集合? 试另外举出几个关于数的有穷集合与无穷集合的例子。

(V) 关系的理論

§27. 关系, 关系的前域与关系的后域; 关系
与有两个自由变項的語句函項

在前几章中; 我們已經談到事物間的一些关系。作为两个事物間的关系的例子, 我們可以举出同一(相等)与相異(不相等)。有时, 我們可以将公式:

$$x=y$$

讀成:

x 与 y 有同一关系

或

x 与 y 之間有同一关系;

并且我們說“=”表示同一关系。同样, 有时候我們把公式:

$$x \neq y$$

讀成:

x 对 y 有相異关系

或

x 与 y 之間有相異关系,

并且我們說“ $\neq$ ”表示相異关系。此外, 我們还談到过类与类之間的某些关系, 例如, 包含关系, 相交关系, 不相交关系等等。現在, 我們要來討論一些屬於一般的关系理論的概念。关系的理論, 是邏輯中的一个專門的而且非常重要的部分; 关系的理論研究帶有完全任意性质的关系, 并且确立关于这些关系的一般定律。①

① 摩根与皮尔斯(參看第 12 頁 §5 注①和第 50 頁第(II)章练习 14 注①)首先发展了关系理論, 特别是发展了关系理論中叫作关系演算的这一部分(參看 §28)。德国

为了便于討論，我們引入变項“ R ”，“ S ”，…以表示关系。我們可以將：

事物 x 与事物 y 有 R 关系

簡写成：

$$x R y,$$

又可以將：

事物 x 与事物 y 没有 R 关系，

写成(应用語句演算中的否定符号，参看 §13)：

$$\sim(x R y)。$$

任何一个与某一事物 y 有 R 关系的事物，叫作 R 关系的前趋 (predecessor)；任何适合

$$x R y$$

中的 y 的事物，叫作 R 关系的后继 (successor)。由所有 R 关系的前趋构成的类，叫作 R 的前域 (domain)，由所有 R 关系的后继构成的类，叫作 R 的后域 (counter domain 或 converse domain)。例如，任何事物都既是同一这个关系的前趋，又是同一这个关系的后继。因而，同一关系的前趋与后继，都是全类。

在关系理論中，正如在类理論中，我們可以区分不同級的关系。第一級关系就是个体之間的关系。第二級关系就是第一級关系与第一級关系之間的关系，或第一級类与第一級类之間的关系；其余可以类推。在这里，情形是更为复杂的。因为，我們常常要研究到“混合的”关系，这种混合关系的前趋，例如說，是个体，而它的后继是类，或者，前趋是第一級类，而它的后继是第二級类。混合

邏輯家习玉德系統地扩充和完成了这种理論。习玉德的《关系的代数与邏輯》(Algebra und Logik der Relative, Leipzig 1895)这本书 [这是他的更大的著作：《关于邏輯的代数学》(Vorlesungen über die Algebra der Logik) 一书中的第三卷]至今还是一本仅有的詳細討論关系演算的书。

关系中的最重要的例子，就是那种存在于一个元素与这个元素所屬的类之間的关系。我們还記得，这种关系在 §21 中，是用“ $\in$ ”表示的。和在討論类理論时一样，我們現在主要也只討論第一級关系；然而，这里所討論的概念可以应用于，并且在少数情形下将被应用于更高級的关系。

我們假定，对于每一个具有两个自由变項 x 与 y 的語句函項，相应地，有一种存在于事物 x 与 y 之間的关系，当且仅当 x 与 y 滿足这个語句函項。就这一点而說，我們說：一个具有自由变項 x 与 y 的語句函項，表示一种 x 与 y 之間的关系。例如，下面这个語句函項：

$$x+y=0$$

表示具有正負相反符号的关系 (having the opposite sign)，或簡單地說，正負相反的关系；数 x 与数 y 就有正負相反的关系 (the relation of being opposite) 当且仅当 $x+y=0$ 。如果我們用符号“ $\circ$ ”表示这种关系，那么，公式：

$$x \circ y$$

与

$$x+y=0$$

就是等值的。同样，任何只包含自由变項 x 与 y 的語句函項都可以变成一个具有

$$x R y$$

形式的等值的公式，其中 R 是一个指示某种关系的常項。因此，正如同公式

$$x \in K$$

可以看作是包含一个自由变項的語句函項的普遍形式一样，公式

$$x R y$$

可以看作是包含两个自由变項的語句函項的普遍形式(参看§22)。

§28. 关系的运算

关系理論是数理邏輯中高度发展的分支之一。关系理論的一个部分——关系运算与类的运算相似；它的主要对象是建立有关关系运算的定律，用这些运算定律，可以由一些給定的关系，构造出另一些关系来。

在关系运算中，我們首先要考慮到的是一組概念，这一組概念与类的运算中的概念完全类似；而关于这一組概念的定律也同类的演算中的定律十分相似。我們常常用类的运算中的符号去表示这組概念。（当然，为了避免混同起見，我們也可以在关系运算中采用另一組符号，例如，我們可以把类的运算中的每一个符号，都加上一个点，而将这些加了点的符号用作关系运算中的符号。）

因此，在关系运算中我們有两种特別的关系，即：全关系 $\vee$ 与 空关系 $\wedge$ ；全关系为任何两个事物之間所有，空关系不为任何两个事物所有。

其次，关系与关系之間有各种关系，例如，包含关系。如果，任何时候两个事物間有关系 R ，这两事物間就有关系 S ，那么，我們就說：关系 R 包含于 关系 S ；換言之，对于任何 x 与 y ，如果公式：

$$x R y$$

蘊涵

$$x S y,$$

那么，关系 R 就包含于关系 S ，用符号表示，就是：

$$R \subset S.$$

例如，从算术中，我們知道：任何时候

$$x < y,$$

那么，

$$x \neq y.$$

因此，小于这个关系就包含于不等这个关系。

如果同时

$$\text{既 } R \subset S \text{ 而且 } S \subset R,$$

也就是說，如果关系 R 与关系 S 存在于那些同一的事物之間，那么， R 与 S 就是同一的，即

$$R = S.$$

其次，还有两个关系 R 与 S 之和，用符号表示，即：

$$R \cup S.$$

和两个关系 R 与 S 之积或交，用符号表示，即：

$$R \cap S.$$

两个事物間就 $R \cup S$ 关系，当且仅当这两个事物間至少有关系 R 与 S 中之一，换言之，公式：

$$x(R \cup S)y$$

与

$$xRy \text{ 或 } xSy$$

是等值的。同样，两个关系之积也可以这样加以定义，只是把“或”这个詞换成“而且”这个詞。例如，如果 R 是父子关系， S 是母子关系，那么， $R \cup S$ 就是亲子关系，而 $R \cap S$ 却是一个空类。

最后，还有一个关系 R 的否定关系或余关系，这用符号表示如下：

$$R'.$$

R' 存在于两个事物之間，当且仅当一个关系 R 不存在于这两个事物之間。换言之，对于任何 x 与 y ，公式

$$xR'y$$

与公式

$$\sim(x R y)$$

是等值的。应当注意,如果一个关系是一个常項,那么,就常常在这个常項符号上划上一直横或一斜横去表示这个关系的余关系或否定。例如,关系 $<$ 的否定,常用“ $\nless$ ”去表示,而不用“ $<'$ ”去表示。

在关系运算中,也出現一些完全新的,和类的运算中的概念不相似的概念。

这里,首先有两个特別的关系,即个体間的同一关系与相異关系 (这两者恰恰是我們在前面已附带地讲到过的)。在关系运算中,这两种关系就用特別的符号“ $|$ ”与“ D ”来表示(而不用邏輯中其他部分所用的“ $=$ ”与“ $\neq$ ”来表示)⑤⑥。这样,我們就将它們写成:

$$x|y \text{ 与 } xDy,$$

而不写成:

$$x=y \text{ 与 } x\neq y.$$

符号“ $=$ ”与“ $\neq$ ”在关系运算中,只是用来表示关系与关系之間的同一与相異的。

这里,我們还有一个引人注意的而且重要的新运算,应用这个运算,我們能够从两个关系 R 与 S 得到第三个叫作 R 与 S 的相对积这样的关系(为了同相对积区别,通常的 R 与 S 的积,就叫作绝对积)。 R 与 S 的相对积,用符号表示为:

$$R/S;$$

x 与 y 之間有关系 R/S , 当且仅当有一个 z 使得

$$x R z \text{ 而且 } z S y.$$

例如,令 R 为是丈夫关系, S 为是女儿关系。如果有一个人 z , 而

x 是 z 的丈夫， z 是 y 的女儿，那么， x 与 y 之間有 R/S 关系，而 R/S 关系也就是女婿关系。此外，我們还有一种具有类似性质的运算，它叫作两个关系的相对和。这个运算并不起重大的作用，因此这里我們也就不給它下定义了。

最后，还有一种运算（它与作出 R' 的那种运算相类似），应用这种运算，我們能够从一个关系 R 得到一种叫做 R 的逆关系的新关系。这种关系用符号表示就是：

$$\check{R}.$$

$\check{R}$ 存在于 x 与 y 之間，当且仅当 R 存在于 y 与 x 之間。如果一个关系是用一个常項表示的，那么，要表示这个关系的逆关系，我們就常常把这个常項写成相反的方向。例如，关系 $<$ 的逆关系，就是关系 $>$ ，因为，对于任何 x 与 y ，公式

$$x < y$$

与公式

$$y > x$$

是等值的。

考虑到关系运算的頗为專門的性质，我們在这里就不再进一步詳細討論它了。

§29. 关系的一些性质

現在我們要轉到关系理論的另一个部分，在这个部分中，我們要提出并且研究一些在其他科学中，特別是在数学中，常常碰見的特別的关系。

如果 K 类中的每一个元素都与它自己有关系 R ，我們就說，关系 R 在 K 类中是自反的；用符号表示，就是：

$$x R x;$$

如果 K 类中没有一个元素与它自己有关系 R , 即

$$\sim(xRx),$$

那么, 我們就說: 关系 R 在 K 类中是不自反的。如果对于 K 类中任何两个元素, 公式

$$xRy$$

蕴涵公式

$$yRx,$$

那么, 我們就說: 关系 R 在 K 类中是对称的。但是, 如果公式

$$xRy$$

蕴涵

$$\sim(yRx),$$

那么, 我們就說: 关系 R 在 K 类中是不对称的。如果对于 K 类中的任何三个元素 x, y 与 z 而說, 条件

$$xRy \text{ 而且 } yRz$$

永远蕴涵

$$xRz,$$

那么, 我們就說: 关系 R 在 K 类中是传递的。最后, 如果对于 K 类中任何两个元素 x 与 y , 下面两个公式

$$xRy, yRx$$

中至少有一个是真的, 也就是說, 如果关系 R 至少以一个方向存在于 K 类中任意两个不同元素之間, 那么, 我們就說: 关系 R 在 K 类中是連通的。

如果 K 是一个全类(或者, 至少, 是我們所研究的那一門科学的論域, 参看 §23), 为了簡單起見, 我們常常不說: 某关系在 K 类中是自反的、对称的, 等等, 而只說: 它是自反的、对称的, 等等。

§30. 自反的, 对称的与傳遞的关系

上面所說的那些关系的性质, 常常联合在一起出現。例如, 常常有一些关系, 它們既是自反的, 又是对称的, 又是傳遞的。典型的例子, 就是同一关系。§17 的定律 (II), 就是表示同一关系是自反的, 定律 (III) 表示同一关系是对称的, 定律 (IV) 表示同一关系是傳遞的 (这也說明何以我們給 §17 所讲的那些定律以这样的名称)。在几何中可以找到这类关系的許多其他例子。在一个綫段的集合中, 例如, 全等是一个自反的关系, 因为每一个綫段都与它自己全等。全等又是对称的, 因为, 如果綫段 A 与綫段 B 是全等的, 那么, 綫段 B 与綫段 A 是全等的。同时, 全等还是傳遞的, 因为, 如果綫段 A 与綫段 B 是全等的, 而且綫段 B 与綫段 C 是全等的, 那么, 綫段 A 与綫段 C 是全等的。多角形間的相似, 直綫間的平行 (假定任何直綫都与它自己平行) 都具有上面所說的三个性质。在几何范围之外, 人与人間的年岁相同关系, 字与字間的同义关系, 也都具有上面所說的三个性质。

我們可以将每一个同时是自反的、对称的与傳遞的关系看作是某一种相等。因此, 我們可以不說: 两个事物間有那样一种关系, 而說: 这两个事物在某个方面是相等的, 或者, 更准确地說: 这两个事物的某个性质是同一的。这样, 我們可以把两个綫段是全等的, 或, 两个人是同样年龄的, 或者, 两个字是同样意义的这些說法, 分別换成: 这两个綫段在长度方面是相等的, 这两个人年龄是相同的, 这两个字的意义是同一的。

*我們用一个例子來說明, 怎样我們可以为上面那种表达方式建立一个邏輯的基础。为此, 我們且考虑多角形間的相似关系。我們把由所有相似于一个給定的多角形 P 的多角形所构成的集

合称为多角形 P 的外形 (或者, 用较为流行的术语說, 我們將这个共同的性质称为多角形 P 的外形, 这个共同性质是所有相似于多角形 P 的多角形所都具有而其他的多角形所都没有的)。这样, 不同的外形就是多角形的某种不同的集合 (或者說, 是多角形的某种不同的性质, 参看 §22 末尾的說明)。上面已經讲过, 相似关系是自反的、对称的与传递的。根据这点, 我們現在很容易說明: 每一个多角形属于, 并且仅仅属于一个这样的集合, 两个相似的多角形属于同一个集合, 两个不相似的多角形属于不同的集合。由此, 我們就可以推出: 公式

多角形 P 与 Q 是相似的

与公式

多角形 P 与 Q 有相同的外形 (即是說, P 与 Q 的外形是同一的)

是等值的。

讀者将会注意到, 在以前的討論过程中, 我們已經用了类乎这样的办法, 即是在 §26 中, 我們將表达式:

K 类与 L 类是等数的

变为和它等值的表达式:

K 类与 L 类有同一的基数。

我們不难說明, 同样的办法可以应用于任何自反的、对称的与传递的关系^{③④}。甚至还有一个叫作抽象原則 (principle of abstraction) 的邏輯定律, 它給上面的办法提供一个普遍的理論基础, 但是, 这里我們不想对这个原則作精确的討論。*

直到現在, 还没有一个普遍接受的术语来表示所有那些既是自反的、又是对称的与传递的关系。有时候, 我們一般地将这样的关系叫作相等或等值 (equalities 或 equivalences)。但是, “相等”

这个語詞，有时是用来表示我們这里所說的这一类关系中的某些特殊的关系，因而，如果两个事物之間有这样的一种特殊的关系，那么我們就說，这两个事物是相等的。例如，在几何中，如我們在 §19 已經指出，全等的綫段，常常叫作相等的綫段。这里，我們再一次強調，最好根本避免用这样的說法；这样的說法会产生含混，并且它違反了我們將“相等”与“同一”看作同义字的这个規定。

§31. 序列关系；其他关系的例子

另一类常見的关系，就是那些在一个給定的类 K 中不对称的、傳遞的与連通的关系（可以很容易看到，这样的关系也必然是在 K 类中不自反的）。我們說：一个具有这些性质的关系，在 K 类中确立一个序列；我們也說：关系 R 将 K 类排成一个序列^{③④}。例如，小于这个关系（或，我們偶然也会說，少于这个关系），它在任何数的集合中都是不对称的，因为，如果 x 与 y 是任何两个数，又如果

$$x < y,$$

那么，

$$y \nless x, \text{ 也就是說 } \sim(y < x);$$

小于这个关系是傳遞的，因为，公式

$$x < y \text{ 而且 } y < z$$

蕴涵

$$x < z;$$

最后，小于这个关系是連通的，因为，在任何两个不同的数中，总有一个数小于另一个。（而且小于也是不自反的，因为，沒有一个数小于它自己。）因此，小于这个关系将任何数的集合排成一个序列。同样，大于这个关系也表示了任何数的集合的另一种序列关系。

現在讓我們來考慮老于这个关系。我們很容易证明：老于这个关系，在任何一个給定的人的集合中是不自反的、不对称的而且傳遞的。但是，它却不一定是連通的；因为，可以有这样的情形，在这一个集合中，包含两个恰恰是同一年岁的人，也就是說，他們是在同一个时刻出生的，并因此老于这个关系就不在任何方向下存在于他們之間。另一方面，如果我們所考虑的是这样一个集合，在这个集合中沒有两个年岁完全相同的人，那么，老于这个关系便在那个集合中建立起一个序列。

还有許多关系，既不屬於自反的、对称的与傳遞的关系这一个范疇，也不屬於不对称的、傳遞的与連通的关系这一个范疇。讓我們來考虑几个例子。

相異这个关系在任何集合中都是不自反的，因为沒有一个事物不同于它自己；相異这个关系是对称的，因为，如果

$$x \neq y,$$

那么，

$$y \neq x;$$

相異关系不是傳遞的，因为公式：

$$x \neq y \text{ 而且 } y \neq z,$$

并不蘊涵：

$$x \neq z.$$

相異关系是連通的，这一点是很容易明白的。

根据同一定律与一条三段論定律(参看 §24)，我們知道，类与类間的包含关系是自反的与傳遞的；又我們知道，包含关系既不是对称的，也不是不对称的，因为，公式：

$$K \subset L$$

既不蘊涵，也不排除

$$L \subset K$$

当且仅当 K 类与 L 类是同一的, 那么, $K \subset L$ 与 $L \subset K$ 才同时是真的; 最后, 我們很容易知道, 包含不是連通的。这样, 包含这个关系的性质, 同前面所讲过的那些关系的性质都不同。

§32. 一多关系或函項

現在我們要比較詳細地討論另一类特別重要的关系。如果对于每一个事物 y , 至多有一个事物 x , 使得 xRy , 换言之, 如果公式

$$xRy \text{ 而且 } zRy$$

蕴涵

$$x = z,$$

那么, 关系 R 就叫作一多关系或者函項关系, 或者, 简单地叫作一个函項。关系 R 的后继, 就是这样的一些事物 y , 对于这些 y 确实有一些事物 x , 使得

$$xRy;$$

关系 R 的后继, 叫作关系 R 的主目值; 关系 R 的前趋叫作关系 R 的函項值, 或者, 简单地叫作函項 R 的值。令 R 是一个任意的函項, y 是函項 R 的任何一个主目值, 那么, 那个相应于主目值 y 的唯一的函項值 x , 我們就用符号“ $R(y)$ ”来表示。因而, 我們用

$$x = R(y) \text{ ③④}$$

去代換

$$xRy。$$

一般地, 特别是在数学中, 已經成为一个习惯, 我們不用变項“ R ”, “ S ”, …而用别的字母如“ f ”, “ g ”…去表示函項关系, 因此, 我們常常可以看到这样的公式, 如:

$$x=f(y), \quad x=g(y), \dots;$$

公式:

$$x=f(y)$$

可以讀成:

函項 f 对于主目值 y 指定值 x ,

或者讀成:

x 是那个相应于主目值 y 的函項 f 的值。

(另外也有一种习惯, 用变項“ x ”去指主目值, 用“ y ”去指函項值。

我們將不遵守这种习惯。我們还是用“ x ”去指函項值, 用“ y ”去指主目值, 因为这样可以便于与关系理論中所用的一般符号联系起来。)

在許多初等代数教科书中, 我們发现, 关于函項概念的定义与这里所用的定义很不同。在那些教科书中, 函項关系被表述为是一种两个“变”量或“变”数間的关系, 即, 被表述为是“自变項”与“应变項”間的关系; 自变項与应变項是互相依賴的: 如果自变項变了, 应变項也跟着变。这种定义今天已經不該再用了, 因为它們經不起任何邏輯的批判。从前有过一个时期, 有人企图分別“常”量与“变”量 (参看 §1), 这种定义是这个时期遺留下来的东西。但是, 如果一个人想既合乎近代科学的要求, 又不完全打破傳統, 他可以保留旧术语, 而在語詞“主目值”与“函項值”之外, 再用“自变項值”与“应变項值”这样的表达式。

函項关系的最简单的例子, 就是通常的同一关系。作为日常生活中的一个函項的例子, 我們可以举下列語句函項所表示的关系为例:

x 是 y 的父亲。

这是一个函項关系, 因为, 对于任何人 y , 只有一个人 x , 这个人是

y 的父亲。为了表明出这个关系的函項性质, 我們可以在上面的表述中加一个“那”字, 即:

x 是那 y 的父亲,

代替这个表达式, 我們也可以說:

x 是和那 y 的父亲同一的。

这一种, 用加一个有定冠詞“那”来改变原来那个表达式的方法, 在日常語言中所起的作用, 正和我們在符号表述中从公式

$$x R y$$

轉換到

$$x = R(y)$$

所起的作用是相同的。

函項这个概念, 在数学科学中起着最重大的作用。高等数学中有些分支, 是专门来研究某种函項关系的。但是, 在初等数学, 特別在代数与三角中, 我們也发现大量的函項关系。下面这些公式所表示的关系, 就是函項关系:

$$x + y = 5$$

$$x = y^2$$

$$x = \log_{10} y$$

$$x = \sin y,$$

其他还有許多。让我们比較仔細地研究一下上面的第二个公式。对于每一个数 y , 只有一个相应的数 x , 使得 $x = y^2$ 。这样, 这个公式就表示了一种函項关系。这个函項的主目值是一些任意数, 然而这个函項的值, 却是一些非負数。如果我們用符号“ f ”表示这个函項, 公式:

$$x = y^2$$

就具有这样一个形式:

$$x=f(y)。$$

显然地, 这里的“ x ”与“ y ”可以用指示确定的数的符号来代换。例如, 由于

$$4=(-2)^2,$$

我們就可以断言:

$$4=f(-2)。$$

这样, 4 就是相应于主目值 -2 的函項值。

另一方面, 在初等数学中, 我們也碰到許多不是函項的关系。例如, 小于这个关系就不是一个函項, 因为, 对于每一个数 y , 有无穷多的数 x , 使得

$$x < y。$$

又, 公式

$$x^2 + y^2 = 25$$

所表示的数 x 与数 y 間的关系, 也不是一个函項关系, 因为, 对于同一个数 y , 可以有两个不同的数 x 滿足这个公式; 例如, 对于数 4, 就有两个相应的数 3 与 -3 。应当注意: 像上面这个关系那样, 在有些由方程式所表示的数与数的关系中, 一个 y 同两个或两个以上的 x 相应; 这样的关系, 在数学中有时被称作二值函項或多值函項 (以別于单值函項或普通意义下的函項)。然而我們觉得, 将这种关系叫作函項, 似乎是不妥当的, 至少在初等数学中是不妥当的, 因为, 这样就会抹杀函項这个概念与关系这个更为普遍的概念之間的本質区别。

就数学在經驗科学中的应用說, 函項有特別的重要性。每当我們研究客观世界中两种量間的依賴关系时, 我們就力求給这种依賴关系一个数学公式, 这个数学公式使我們能够用一种量来精确地决定另一种量。这样一个公式就表示两种量之間的某些函項

关系。讓我們举物理学中一个有名的公式作为例子:

$$s = 16.1 t^2;$$

这个公式表示自由下落的物体所經過的距离 s 对于它的下落時間 t 的依賴关系(距离以呎为单位, 時間以秒为单位)。

*在結束我們关于函項关系的討論时, 我們要着重指出, 这里所讲的函項这个概念是与 §2 中所讲的語句函項与指示函項有本质的不同的。严格地說, “語句函項”与“指示函項”这些語詞, 并不属于邏輯或数学的范围; 这些語詞表示某种表达式, 这种表达式可以用来帮助构成邏輯与数学公式, 但是, 这些表达式本身并不表示这些邏輯与数学公式所研究的事物(參看 §9)。但是, 我們这里所讲的新的意义下的“函項”, 却是一个純粹的邏輯性质的表达式, 它表示邏輯与数学所研究的某一类型的事物。无疑, 在这些概念之間是有联系的; 这种联系大体上可以这样来表述: 如果用符号“=”把变項“ x ”和一个只包含变項“ y ”的指示函項(例如, “ $y^2 + 2y + 3$ ”)联結起来, 那么, 所得出的公式(它是一个語句函項):

$$x = y^2 + 2y + 3$$

就表示一个函項关系; 或者說, 存在在那些, 并且仅仅在那些滿足于这个語句函項的数 x 与 y 之間的关系是一种这里所說的新的意义下的函項。这就是这些概念常常混淆的理由之一。*

§33. ——关系或——函項与——对应

在函項关系中, 应当特別注意所謂——关系或——函項。——关系或——函項是这样的函項关系, 在这种关系中, 不仅对于每一个主目值 y , 只有一个相应的函項值 x , 而且对于每一个函項值 x , 也只有一个相应的主目值 y 。也可以这样来定义: 包含变項 x 与 y 的——关系或——函項, 就是这样的关系, 不但在这些关系本

身中 x 对 y 是一多关系, 而且在它們的逆关系中(参看§28), y 对 x 也有一多关系。

如果 f 是一个一一函項, K 是由主目值构成的一个任意类, 而 L 是由和 K 的元素相应的函項值所构成的类, 那么, 我們就說: 函項 f 以一一对应的方式把 K 类映射在 L 类上, 或者說: 函項 f 建立了 K 的元素与 L 的元素之間的一一对应。

讓我們研究几个例子。假定有一条从 O 点引出的半綫, 綫上划出一綫段作为长度的单位。又; 令 Y 是在半綫上的任何点。于是, 我們就可以度量綫段 OY , 也就是說, 我們可以給 OY 一个相应的非負数 x , x 叫作綫段 OY 的长度。因为这个数 x 完全依赖于点 Y 所在的地位, 我們可以用符号 “ $f(Y)$ ” 去表示它。因而, 我們就得出:

$$x = f(Y).$$

但是, 反过来, 对于任何一个非負数 x , 我們也可以在半綫上划出一条唯一的确定的綫段 OY , 使得它的长度等于 x 。换言之, 对于每一个 x , 恰恰只有一个点 Y 与之对应, 使得

$$x = f(Y).$$

因此, 函項 f 是一一函項。它在半綫上的点与非負数之間建立了一个一一对应的关系 (也可以在整个綫的点与所有实数之間建立一个一一对应)。另外一个例是下面这个公式所表示的关系:

$$x = -y.$$

这是一个一一函項, 因为, 对于任何数 x , 只有一个数 y 滿足这个公式; 很容易看出, 这个函項在由所有正数构成的集合与由所有負数构成的集合之間建立了一个一一对应。作为最后一个例, 我們举出下面这个公式所表示的关系:

$$x = 2y,$$

假定符号“ y ”在这里只表示自然数。这又是一个一一函項；这个函項使得对于任何自然数 y ，有一个偶数 $2y$ 与之对应；同时，对于每一个自然数的偶数 x ，恰恰有一个数 y 与之对应，使得 $2y=x$ ，即是， $y=\frac{1}{2}x$ 。这样，这个函項在任意自然数与偶数的自然数之間建立了一个一一对应的关系。——从几何範圍內，我們可以举出許許多多的一一函項的例子（对称、共綫的映射等等）。

*由于我們有了一一对应这样一个概念，現在，我們就能够給我們在前面曾經直觉地但并不是严格地表述过的那个語詞下一个精确的定义。它就是等数类这个概念（参看§26）。現在，我們可以說：如果有一个函項，它在 K 类的元素与 L 类的元素之間建立了一个一一对应的关系，那么， K 类与 L 类就是等数的，或者說， K 类与 L 类有相同的基数。根据这个定义，結合前面所举的例子，我們就可得出：一个任意半綫上的所有点的集合与所有非負数的集合是等数的；同样，正数的集合与負数的集合是等数的，所有自然数的集合与所有偶数的自然数的集合是等数的。最后的那个例子，是特別有意义的，因为这个例子表示了一个类可以同它的真正子类是等数的。对于許多讀者，这个事实初看起来似乎是很諍謬的，因为，平常我們总是用两个有穷类来互相比較它們的元素的数目，而一个有穷类的确总是比它的任何部分具有較大的基数。但是，如果我們想到：自然数的集合是无穷集合，而我們不能把完全是从观察有穷集合所得出的性质，加之于无穷集合，那么，这个諍謬的情况就不存在了。值得提出的是：自然数的集合同它的一个部分等数这样一个性质，是任何无穷集合所共有的。这个性质，因此，可以作为无穷集合的特点，我們可以根据这个特点而分別无穷集合与有穷集合；一个有穷集合可以简单地定义为是一个类，这个类同它的任何真正子类不是等数的。（虽然，这个定义会产生一些

邏輯上的困难,我們在这里不加討論。)^{①*}

§34. 多項关系; 包含几个变項的函項与运算

直到現在,我們只是討論了兩項关系,即是,只討論了在两个事物間的关系。然而,我們在各門科学中常常会碰到三項与多項关系。例如,在几何中,“在…之間”这个关系,就是一个典型的三項关系。“在…之間”这个关系存在于一条綫上的三个点之間,用符号表示就是:

$$A/B/C,$$

它可以讀为:

B 点是在 A 点与 C 点之間。

算术也提供了許多三項关系的例子; 在三个数 x 、 y 与 z 之間的关系, 如

$$x = y + z$$

就是一个三項关系。同样, 公式:

$$x = y - z$$

$$x = y \cdot z$$

$$x = y : z$$

都是三項关系。

下面这个关系, 就是一个四項关系的例子, 即: A, B, C, D 之間的关系是一个四項关系当且仅当 AB 的距离等于 CD 的距离, 也就是說, 如果綫段 AB 与綫段 CD 全等。另外一个四項关系的

① 第一个引起人們注意我們这里所討論的无穷集合的性质的, 是德国哲学家与数学家波察諾(B. Bolzano, 1781—1848)。在他的书《无穷的諄論》(萊比錫, 1851)里, 我們已經看到近代集合論的萌芽。后来皮尔斯(參看第 12 頁 §5 注①)与一些別人用上面所說的那个性質去定义有穷集合与无穷集合。

例子, 就是数 x, y, z, t 有这样一个比例关系:

$$x : y = z : t.$$

在多項关系中, 具有特別重要性的是那些相当于二項函項关系的多項函項关系。为了簡單起見, 我們只限于討論这类多項关系中的三項关系。如果对于任何两个事物 y 与 z , 至多只有一个相应的 x , 使得 x 对 y 与 z 有 R 关系, 那么, R 关系就叫作一个三項函項关系。这个唯一地确定的事物, 假如它存在的話, 我們或者用符号

$$R(y, z)$$

或者用符号

$$y R z$$

去表示它($y R z$ 在这里的意义和它在二項关系里的意义不同)。这样, 要表示 x 对 y 与 z 有函項关系 R , 我們有下面两个公式可以应用:

$$x = R(y, z) \text{ 与 } x = y R z.$$

相应于上面这两个公式, 我們有两种說明的方法。當我們用公式

$$x = R(y, z)$$

时, 我們就将 R 叫做函項。为了分別二項函項关系与三項函項关系, 我們將前者叫作有一个变項的函項或有一个主目的函項, 而将后者叫作有两个变項的函項或有两个主目的函項。同样的, 四項的函項关系, 就叫作有三个变項的函項或有三个主目的函項, 其余类推。在表示包含任何数目的主目的函項时, 我們习惯用变項“ f ”, “ g ”, ...; 公式:

$$x = f(y, z)$$

讀成

x 是那个相应于主目值 y 与 z 的函项 f 的值
 当我们用公式:

$$x = y R z$$

时, 关系 R 常常被看作一个运算, 或者, 更明确一点, 看作一个二元运算, 上面的公式, 就讀成:

x 是施运算 R 于 y 与 z 的结果;

在这句句子里, 在“ R ”这个字母的位置上, 我們倾向于用别的字母, 特别是用字母“ O ”。算术的四个基本运算: 加法、减法、乘法与除法, 可以作为例子; 同样, 如像类与关系的加法与乘法这样一些邏輯运算, 也可以作为例子(参看§25与§28)。有两个变项的函项这个概念, 与二元运算这个概念, 内容上显然是完全相同的。也許应当說一下, 有一个变项的函项, 有时也叫作运算, 詳細点說, 叫作一元运算。例如, 在类的运算中, 一个类的余, 通常不看作是一个函项, 而看作是一个运算。

虽然多项关系在各門科学中起着重要的作用, 但是, 多项关系的普遍理論, 还是在刚开始研究的阶段。当我们說到一个关系或关系的理論时, 通常我們在心里所指的, 只是二项关系。直到現在, 我們只对三项关系中的一个特殊的范疇, 即二项运算的范疇进行过比較詳細的研究。这种运算的典型例子, 就是算术的加法。对于这方面的研究是由一門特別的数学理論——群論——所担負的。在本书的第二部分, 我們將要讲到群論中的一些概念, 这样, 也就要讲到二元运算的某些一般性质。

§35. 邏輯对其他科学的重要性

上面我們討論了現代邏輯的一些最重要的概念, 并且, 在討論中, 熟悉了一些(当然只是很少一些)有关这些概念的定律。但是

本書的目的並不是要把我們在科學論證中所應用的一切邏輯概念和定律都無遺地列舉出來。就其他科學，甚至就和邏輯關係最密切的數學科學的研究和提高說，這也是不必要的。邏輯被正當地認為是一切其他科學的基礎，我們只要舉出一個理由：在每一個論證中我們都應用取自邏輯範圍的概念，每一個正確的推論都要遵循邏輯的定律來進行。但這並不等於說，要能正確思想就必須完全精通邏輯；即使職業數學家，他們一般不會犯推論的錯誤，常常也並不是對邏輯熟悉到這樣的地步，以致能意識到他們所不自覺地應用的一切邏輯定律。雖然這樣，但是，邏輯知識對於每一個希望正確地思想和推理的人無疑具有很大的實際重要性，因為它能夠提高我們這方面的先天和習得的能力，並且在特別繁複細緻的問題中，防止我們犯邏輯的錯誤。至於專門就數學定理的構造來說，那末，從理論觀點來看，邏輯更起着非常重要的作用；關於這個問題我們在下一章討論。

練習

1. 從算術、幾何、物理和日常生活中，舉出一些關係的例子。
2. 考慮“是父親”這個關係，即是，考慮下面語句函項所表示的關係：

x 是 y 的父親。

是否所有人都屬於這個關係的前域？是否所有人都屬於這個關係的後域？

3. ③④ 考慮人與人間的七種關係，即是，是父親、是母親、是孩子、是兄弟、是姐妹、是丈夫、是妻子。我們用符號“F”、“M”、“C”、“B”、“S”、“H”、“W”分別表示這七種關係。將 §28 中所定義的各種運算用到上面這些關係上去，我們就得出一些新的關係，這些新

的关系在日常語言中常常有一个简单的名称;例如,“ H/C ”就表示是女婿这个关系。找出下列关系在日常語言中的简单名称:

$$\check{B}, \check{H}, H \cup W, F \cup B, F/M, M/\check{C}, B/\check{C}, \\ F/(H \cup W), (B/\check{C}) \cup [H/(S/\check{C})].$$

用符号“ F ”, “ M ”, …等等, 并加上关系演算的符号来表示: 是父母, 是兄弟姐妹, 是孙子, 是媳妇, 是岳母这些关系。

說明下面公式的意义, 并指出哪些公式是真的:

$$F \subset M', \check{B} = S, F \cup M = \check{C}, H/M = F, B/S \subset B, \\ S \subset C/\check{C}.$$

4. ④⊕ 考虑下面两个关系演算的公式:

$$R/S = S/R \text{ 与 } \overline{(R/S)} = \check{S}/\check{R}.$$

試用一个例子来表示, 第一个公式并不总是真的。并試证明: 任意两个关系 R 与 S 都滿足第二个公式。

提示: 考虑一下; 說关系 $\overline{(R/S)}$ (即关系 R/S 的逆关系) 或关系 $\check{S}/\check{R}$ 存在于两个事物 x 与 y 間, 这是甚么意思。

5. 試用符号表述 §28 中所討論的一切关系演算的語詞的定义。

提示: 例如, 两个关系之和的定义, 就是下面这样的形式:

$$[x(R \cup S)y] \leftrightarrow [(x R y) \vee (x S y)].$$

6. §29 中所討論的那些关系的性质中, 有哪些是下列諸关系所具有的:

- (a) 自然数集合中的相異关系;
- (b) 自然数集合中的互素关系 (如果两个自然数的最大公因子是 1, 那么, 这两个自然数就叫作互素);
- (c) 多角形的集合中的全等关系;
- (d) 綫段集合中的长于关系;

- (e) 一个平面上的直線的集合中的垂直关系；
- (f) 几何图形的集合中的相交关系；
- (g) 物理事件的类中的同时关系；
- (h) 物理事件的类中的時間在先关系；
- (i) 人类中的亲戚关系；
- (j) 人类中的父子关系。

7. 每一个关系，在一个給定的类中，或者是自反的或者是不自反的；或者是对称的或者是不对称的；这句话对嗎？举例說明。

8. 如果，对于 K 类中的任何三个元素， x, y, z ，公式

$$x R y \text{ 而且 } y R z$$

蕴涵：

$$\sim(x R z),$$

那么，我們就說：关系 R 在 K 类中是不傳遞的。

在上面习题 3 与习题 6 所列举的关系中，哪些是不傳遞的？試另外再举几个不傳遞关系的例子。是否任何一个关系或者是傳遞的或者是不傳遞的？

*9. 說明如何将表达式：

綫 a 与綫 b 是平行的，

变换为下面这个等值的表达式：

綫 a 的方向与綫 b 的方向是同一的。

并說明，在这里如何定义“一条綫的方向”。

又，說明如何将表达式：

綫段 AB 与綫段 CD 是全等的

变换为下面这个等值的表达式：

綫段 AB 的长与綫段 CD 的长是相等的。

并說明这里如何定义“一个綫段的长”。

指出这里需要应用那一条邏輯定律?

提示: 參照 §30 所談相似这个概念。

10. 讓我們将两个符号或由几个符号所构成的两个表达式叫作同形的(equiform), 如果它們之間、就外形說, 没有什么不同, 他們的可能的不同只是空間、地位的不同(即是說, 印在紙上的地位不同); 否則, 就叫作不同形的。例如, 在公式:

$$x = x$$

中, 等号两边的变項是同形的。相反, 在下面公式:

$$x = y$$

中, 等号两边的变項是不同形的。

現在要問, 下面公式:

$$x + y = y + x$$

是由多少符号构成的? 这些符号可以分成多少群, 使得两个同形的符号屬於同一的群, 而两个不同形的符号屬於两个不同的群?

在 §29 所討論的那些性质中, 哪些屬於同形关系, 哪些屬於不同形关系?

*11. 在上題答案的基础上, 說明为什么可以說: 两个同形的符号, 就外形說, 是相等的, 或者, 它們有相同的外形? 說明如何定义“一个給定的符号的外形”。

将两个同形的符号简单地叫作相等, 或者將它們看成好像是同一个符号, 这是非常通行的用法。例如, 我們常說, 在下面这样一个表达式:

$$x + x$$

中, 同一个符号在符号“+”的两边出現。应当如何表示才更加准确?

*12. 在 11 题中所指出的不准确的說法, 在本书中也用过好几

次。指出本书 §4(第 7—11 頁)与 §17(第 52—55 頁)中这种不准确的說法,并說明如何將它們改成准确的說法。

下面是这种不准确說法的另一个例子:当我们說包含一个自由变項的語句函項时,我們是指这样的函項,在这样的函項中,所有的自由变項都是同形的。如何將表达式:

包含两个自由变項的語句函項

用更准确的办法表示出来?

13. 在平面上給定一点,在这个平面上,有許多的圓以这个定点作为它們共同的圓心,这許多圓便构成一个集合。試說明这个集合是用“是部分”这个关系序列起来的。如果这許多圓不在同一个平面上,或者,如果它們不是同心圓,試問能否用“是部分”这个关系把这个集合序列起来?

14. 在英文的字与字之間有一种关系,叫做(詞典序列的)在前关系。我們用例子來說明这个語詞的意义。“and”这个字在“can”这个字之前,因为前者的第一个字母是“a”,后者的第一个字母是“c”,而在英文的字母序列里,“a”在“c”之前。“air”这个字是在“ale”这个字之前,因为它們的第一个字母是相同的(或者說,是同形的——参看前面习题 10),但是,第一个字的第二个字母是“i”,第二个字的第二个字母是“l”,而在英文的字母序列里,“i”在“l”之前。同样,“each”这个字在“eat”这个字之前,“timber”这个字在“time”这个字之前。最后,“war”这个字是在“warfare”这个字之前,因为,虽然这两个字的前三个字母都相同,但是,第一个字只有三个字母,而第二个字却有不止三个字母。同样,“mean”这个字在“meander”这个字之前。

將下面这些字写成一行,使得这行中的每一个字与它右边的字都有在前关系:

care, arm, salt, art, car, sale,

trouble, army, ask.

試对字与字之間的在前关系作出一个普遍的定义。試說明这个关系在由所有的英文字所构成的集合中建立了一个序列。指出这个关系的一些实际应用，并說明为甚么这样就建立了一个詞典的序列。

15. ④⊖ 考虑一个关系 R 与它的否定关系 R' ，說明下列关于关系理論的命題是真的：

(a) 如果关系 R 在 K 类中是自反的，那么，关系 R' 在 K 类中就是不自反的；

(b) 如果关系 R 在 K 类中是对称的，那么，关系 R' 在 K 类中也就是对称的；

*(c) 如果关系 R 在 K 类中是不对称的，那么，关系 R' 在 K 类中就是自反的与連通的；

*(d) 如果关系 R 在 K 类中是傳遞的与連通的，那么，关系 R' 在 K 类中就是傳遞的。

上面这些命題的逆定理是否也能成立？

16. 說明关系 R 如果有 §29 所讲的那些性质之一，那么，它的逆关系 $\check{R}$ 也有这个性质。

*17. ④⊖ §29 中所提出的那些关系的性质，可以很容易地用关系演算来加以表示，如果这些关系所涉及的类 K 是全类的話。例如，公式：

$$R/R \subset R \text{ 与 } D \subset R \cup \check{R}$$

就分別地表示关系 R 是傳遞的与連通的。說明其理由；回忆一下 §28 关于“ D ”这个符号的意义。試同样用关系运算来表示关系 R 是对称的、不对称的或不傳遞的（参看前面习题 8）。下面这个公

式:

$$R/\bar{R} \subset I$$

是表示本章所讲的关系的性质中的哪一种性质?

18. 下面公式所表示的那些关系是函項:

(a) $2x + 3y = 12,$

(b) $x^2 = y^2,$

(c) $x + 2 > y - 3,$

(d) $x + y = y^2,$

(e) x 是 y 的母亲,

(f) x 是 y 的女儿。

前面习题 3 中所提到的关系中哪些关系是函項?

19. 考虑下面公式:

$$x = y^2 + 1$$

所表示的函項。它的所有主目值所构成的集合是甚么? 它的所有函項值所构成的集合是甚么?

*20. 在上面习题 18 中哪些函項是一一函項? 再举出几个一一函項的例子。

*21. 考虑下面这个函項:

$$x = 3y + 1.$$

說明这个函項是一一函項, 說明这个函項建立了区間 $[0, 1]$ 与区間 $[1, 4]$ 的一一对应 [参看 (IV) 章习题 6]。从这一点, 我們可以得出哪些有关这两个区間中的基数的結論?

*22. 考虑下面的函項:

$$x = 2^y.$$

利用这个函項并根据上面的习题, 來說明由所有数目所构成的集合与由所有正数所构成的集合是等数的。

*23. 說明由所有自然數所構成的集合與由所有奇數所構成的集合是等數的。

24. 從算術與幾何中舉出幾個多項關係的例子。

25. 在下面公式所表示的三項關係中，哪些是函項：

(a) $x + y + z = 0$,

(b) $x \cdot y > 2z$,

(c) $x^2 = y^2 + z^2$,

(d) $x + 2 = y^2 + z^2$?

26. 試舉出幾個物理定律的名稱，這些物理定律斷定了兩個、三個與四個量之間的函項關係。

(VI) 論演繹方法

§36. 一個演繹的理論的基本組成部分——基本詞項與被定義的詞項，公理及定理

我們現在要對構造邏輯和數學時所用到的基本原則試加說明。對於這些原則加以詳細的分析和評價是一門專門學科，即演繹科學方法論或數學方法論的任務。對於一個要研究或發展某一門科學的人來說，自覺地了解一門科學的方法，是十分重要的。並且我們會發現，就數學而言，關於方法的知識是特別重要的。因為缺乏這種知識，就不可能了解數學的性質。

我們以下要討論的原則為邏輯和數學方面的知識保證了最高度的明晰性和確定性。由這個觀點來看，如果一種方法使我們能夠解釋在一門科學中出現的每一個表達式的意義和證實它的每一個斷定，這種方法將是理想的。很容易看出來，這種理想是永遠不能實現的。事實上當我們試圖解釋一個表達式的意義時，我們必

須用到其他表达式；而为了要解釋这些表达式而不陷入恶性循环，我們又必須利用其他的表达式，如此等等。这样我們就是开始了一个永远不能結束的过程，这个过程可以称之为无穷倒退的过程。在证实一門科学的断定了的命題方面，有着类似的情形。因为为了要建立一个命題的正确性，必須引用别的命題，而（为了不出現恶性循环）这又引到了无穷倒退。

在不可达到的理想与可實現的可能性之間进行折衷的結果，出現了有关数学构造的一些原則，这些原則可以陈述如下^{④⑤}：

当我们着手构造一門給定的学科时，我們首先把这門学科中对我们說来，立即可以理解的一小組表达式分出来；这一組表达式，我們称之为基本詞項或不定义的詞項。我們使用它們而不去解釋它們的意义。同时，我們采用下列的原則：对于这一門学科中任何其他的表达式，仅当我们利用基本詞項和这門学科中其他已經解釋过的表达式确定它的意义之后，我們才使用它。用这种方式确定一个詞項的意义的語句称作一个定义，通过这种方式，意义被确定的表达式称作被定义的詞項。

对于这門学科的断定了的命題，我們可以用类似的方式进行。那些看起来显然成立的命題被挑选出来^{④⑥}，作为基本命題或公理（有时也称作公設，但我們將不以这种專門意义来用这种名詞）；我們认为它們是真的，而不去建立它們的正确性。另一方面，对于任何其他的命題，当且仅当我们能够建立它們的正确性，而且在这样做的时候，只用到了公理、定义和这門学科中其他的正确性已經建立的命題时，我們才认为它們是真的^{④⑦}。如所周知，这样建立起来的命題称作被证明的命題或定理，建立它們的过程称作一个证明。更一般地說，如果在邏輯或数学中，我們以其他命題为基础，建立一个命題，我們將这个过程称作一个推导或演繹。这样建立

起来的命題称作从其他命題推导出来的，或演繹出来的，或者称作它們的推出的結論 ④⑤。

現代数理邏輯就是按照上述原則构造起来的学科之一④⑥。不幸的是在本书的狭小範圍中，不可能对于这一重要事实給以应有的地位。如果任何其他的学科是按照这些原則构造起来的，它就已經是以邏輯为基础的，可以說，已經以邏輯为前提了。这就是說，邏輯的表达式和定律是和要建立的这門学科的基本詞項和公理具有同样的地位。例如邏輯語詞被用在公理、定理和定义之中，而不先解釋它們的意义；邏輯定律被用在证明之中，而不先去确立它們的正确性。有时在构造一个学科时，不仅使用了邏輯，而且在同样的意义之下，还要使用一些已經构造出来的数学学科，这样是比較方便的。为了簡便，可以将这些学科和邏輯称作在給定学科前的学科。邏輯本身則不以任何学科为前提，在构造算术作为一門特殊的数学学科时，邏輯是唯一在前的学科。另一方面，就几何而言，最好不仅以邏輯为前提，而且应以算术为前提（虽然这不是不可避免的）。

根据上面所說的，必須对于前面所陈述的原則的陈述方式作某些修改。在着手构造一个学科以前，必須先列举出来在这一学科之前的那些学科，給表达式下定义和給命題作证明的工作仅限于現在要构造的学科的特有的表达式和命題，也就是說，限于那些不屬於在前的学科的。

严格按照前面所說的原則构造一个学科的方法称作演繹方法，以这种方式构造出来的学科称作演繹的理論①。一种愈来愈普

① 演繹方法不能看作是近代的成就，在古希腊数学家欧几里德(Euclid)的“几何原本”中，我們发现其中对于几何的陈述，就上述的方法論的原則来看，也沒有多少不够之处 ④⑦。两千二百年来，数学家把欧几里德的著作看作科学精确性的理想和范本，

遍的看法是数学学科与其他科学的唯一本质的区别就是演繹法。不仅每一数学学科是一种演繹的理論，而且每一种演繹的理論是一門数学（按照这种看法，演繹邏輯也是一門数学）^{④⑤}。我們在这里将不討論支持这种看法的理由，而只是指出，为这种看法提出有力的論据是可能的。

§37. 一种演繹的理論的模型和解釋

由于系統地应用前一节中所陈述的結果，演繹的理論获得了一些有兴趣而且重要的特性。这些我們預备加以描述。因为我們将要討論的問題是相当复杂而且抽象的，我們將用一个具体的例子加以說明。

假定我們对于有关綫段的全等的一般事实有兴趣，并且准备把几何这一部分建立为一个特殊的演繹理論。我們規定变項“ x ”，“ y ”，“ z ”，…代表綫段。我們选择“ S ”与“ $\cong$ ”等符号作为基本詞項。前者是“所有綫段的集合”的縮写；后者代表全等关系，所以公式

$$x \cong y$$

讀作

綫段 x 与 y 是全等的。

此外，我們只采用两条公理

公理 I. 对于集合 S 的任一元素 x 而言， $x \cong x$ （換言之，每一綫段与其自身全等）。

公理 II. 对于集合 S 的任意的元素 x, y 与 z 而言，如果 $x \cong z$

只是近五十年来才在这方面有了真正的进展。在这时期中，数学的基本学科几何与算术的基础按照現代数学方法論的要求奠定了下来。关于这项进展有关的著作，我們將至少提出下列两部，它們已具有重大历史意义：《数学公式》——这是一部集体写的著作（托林諾 1895—1908），編者和主要著者是意大利数学家与邏輯学家貝安諾（G. Peano, 1858—1932）；以及現代德国大数学家希尔伯特（D. Hilbert）所著的《几何基础》（萊比錫与柏林 1899）。

并且 $y \cong z$, 那么 $x \cong y$ (换言之, 与同一綫段全等的两个綫段, 彼此全等)。

各种关于綫段全等的定理可以从这些公理推出来, 例如

定理 I. 对于集合 S 的任意的元素 y 与 z 而言, 如果 $y \cong z$, 那么 $z \cong y$ 。

定理 II. 对于集合 S 的任意的元素 x, y 与 z 而言, 如果 $x \cong y$ 并且 $y \cong z$, 那么 $x \cong z$ 。

这两条定理的证明是很容易的。我們先說明第一条的证明。

在公理 II 中以“ z ”代“ x ”我們得到:

对于集合 S 的任意的元素 y 与 z 而言, 如果 $z \cong z$ 并且 $y \cong z$, 那么 $z \cong y$ 。

在这个陈述的題設中我們有公式

$$z \cong z,$$

而根据公理 I, 这个公式无疑是正确的, 于是可以省去。这样我們就得到了所要证的定理。

关于这些简单的考虑, 我們要說下面的一些話。

我們的微型的演繹理論是建立在一個适当選擇的基本詞項与公理的系統之上的。我們关于基本詞項所代表的事物, 即綫段与其全等关系的知識是很丰富的, 选用的公理並沒有穷尽了这些知識。但这种知識可以說只是我們个人的东西, 对于我們的理論的构造沒有絲毫影响。特別是在由公理推出定理时, 我們根本不利用這項知識, 就好像我們并不了解我們所考虑的概念的內容, 并且对于公理里沒有明白陈述出来的东西, 好像并不知道。像通常所說的, 我們忽略了我們所采用的基本詞項的意义, 而只注意这些詞項在其中出現的公理的形式。

这里蘊涵着一个非常重要而有兴趣的結論。讓我們把我們的

理論中的所有公理和定理中的基本詞項代之以适当的變項, 例如以代表類的變項“ K ”代替符號“ S ”, 以代表關係的變項“ R ”代替符號“ $\cong$ ”(為了使問題簡單化, 我們這裡忽略那些包含有被定義項的定理)。我們的理論中的命題於是就不再是語句, 而變成了語句函項, 這種函項包含着兩個自由變項“ K ”與“ R ”, 並且一般表達了下列的事實, 即關係 R 在類 K 中有着這種或那種性質 (或者更確切地說, 在 K 與 R 中存在着這種或那種的關係; 參看 §27)。例如, 很容易看出來, 公理 I 與定理 I 及定理 II 現在是說關係 R 在 K 之中是自反的、對稱的和傳遞的。公理 II 則是表示一種沒有特別名字的性質, 我們將稱這種性質為 P ; 就是下列的性質:

對於類 K 中的任意的元素 x, y 與 z 而言, 如果 xRz 並且 yRz , 那麼 xRy 。

因為在我們的理論的证明中, 我們並沒有利用綫段類與全等關係的性質, 而只利用了公理中明顯地陳述出來的性質, 每一個证明都可以推廣, 因為它可以應用於任何具有這些性質的類 K 和關係 R 。由於將证明推廣的結果, 對於我們的理論的任一定理, 可從邏輯的領域中, 也就是從關係理論的領域中, 找到一條一般的定律與之相應, 並且說明了, 在 K 中的任一自反的和具有性質 P 的關係 R , 也具有 P 定理中所表達的性質。例如下列兩條關係理論的定律相當於定理 I 和定理 II:

I'. 每一種在類 K 中自反的和具有性質 P 的關係 R 在 K 中是對稱的。

II'. 每一種在類 K 中是自反的和具有性質 P 的關係 R 在 K 中是傳遞的。

如果一種關係 R 在類 K 中是自反的並且具有性質 P , 我們說 K 與 R 形成我們的理論的公理系統的一個模型或一種實現, 或者

簡單地說，它們滿足這些公理。例如綫段和全等關係，也就是基本詞項所代表的東西，構成這個公理系統的一個模型；自然，這個模型也滿足由公理推出來的所有定理（為了精確，我們應該說，一個模型不是滿足一種理論的命題，而是滿足那些用變數代基本詞項後所得到的語句函項）。但是這一特殊的模型在這個理論的構造中並沒有什麼特殊的地位。相反的，根據像 I' 與 II' 那樣的一般性的邏輯定律，我們得到下列的結論，即這一公理系統的任一模型滿足所有由這些公理推出的定理。由於這一事實，我們的理論的公理系統的一個模型也稱作這一理論本身的模型。

甚至於在邏輯與數學的範圍中，我們能夠為我們的公理系統找到許多不同的模型。為了得到一個這樣的模型，我們在任一其他的演繹理論中選定兩個常項，比如說“ K ”與“ R ”（前者代表一個類，後者代表一個關係），然後我們將這一系統中的每一個“ S ”代之以“ K ”，每一個“ $\cong$ ”代之以“ R ”，最後我們說明這樣得出來的語句是新理論的定理（或者是公理）。假如我們這樣做成了，我們說，我們在另一演繹理論中，為這一公理系統（同時也是為整個演繹理論）找到了解釋。如果不僅在我們的理論的所有的公理中，而且在所有的定理中，將“ S ”與“ $\cong$ ”代之以“ K ”與“ R ”，我們可以事先確信，這樣得到的語句將是新的演繹理論中的真語句。

關於我們的微型理論的解釋，我們在這裡將給出兩個具體的例子。在公理 I 與公理 II 中，“ S ”代之以全類“ $\vee$ ”，“ $\cong$ ”代之以相等符號“ $=$ ”，立即可以看出，這些公理變成了邏輯定律（事實上就是 § 17 中的定律 II 與 V 而稍有改變）。所以全類與相等關係構成這個公理系統的一個模型，而我們的理論在邏輯中找到了一個解釋。這樣，如果我們使定理 I 與 II 中的符號“ S ”和“ $\cong$ ”代之以“ $\vee$ ”與“ $=$ ”，我們一定得到了真的語句（事實上，我們對它們也是

熟悉的——參看 §17 的定律 III 与 IV)。

其次讓我們來考慮整個數的集合, 或者數的其他集合, 用“N”來代表它。兩個數 x 与 y 稱作相等的, 寫作

$$x \equiv y$$

如果它們的差 $x-y$ 是一個整數; 例如我們有

$$1\frac{1}{4} \equiv 5\frac{1}{4},$$

而下列的相等式則不成立

$$3 \equiv 2\frac{1}{3}.$$

如果將兩個公理中的基本詞項都換成“N”或“ $\equiv$ ”, 我們很容易證明, 得到的語句是算術的兩條定理。這樣, 我們的理論在算術中得到解釋, 因為數的集合 N 与相等關係構成這一公理系統的一個模型。並且不需要任何的特殊的推理, 我們相信, 如果定理 I 与 II 和公理一樣經過同樣的變換, 將成為真的算術命題。

上面所描述的一般事實在方法論的研究方面有許多有興趣的應用。我們這裡只舉一個例子來加以說明。我們將要說明, 如何在這些事實的基礎之上證明某些語句是不能從我們的公理系統中推出的。

讓我們來考慮下面的語句 A (只用邏輯詞項和我們的理論的基本詞項來構成的):

A. 集合 S 中存在着兩個元素 x 与 y , 而 $x \not\equiv y$ 不成立 (換言之, 存在着兩個不全等的綫段)。

這個語句看起來毫無疑問是真的, 但是, 在公理 I 与公理 II 的基礎上進行證明, 得不出結果。這樣就引起一個猜測, 即語句 A 不能從我們的公理中推出。為了証實這個猜測, 我們作下面的論證,

如果語句 A 可以在我們的公理系統的基础上加以證明，則我們知道，這個系統的每一個模型都滿足這個語句，所以，如果我們能夠指出這一公理系統的某一個模型是不滿足 A 的，我們就是證明了這一語句不能由公理 I 和公理 II 推出。現在要找到這樣一個模型是毫不困難的。例如讓我們考慮所有整數構成的集合 I (或者任何其他整數集合，例如只包含 0 與 1 的集合) 以及上面已經說過的相等關係 $\equiv$ 。由前面所說的我們已經知道集合 I 與關係 $\equiv$ 構成我們的公理系統的一個模型，而這一模型不能滿足語句 A ，因為不相等的兩個整數 x 與 y ，也就是說它們的差不是一個整數的 x 與 y 是不存在的。另一個滿足這個目的的模型是一個任意的個體類，和任意兩個個體中間的普遍關係 $\vee$ 。

上面所用的推理方法稱作展示模型或凭借解釋的證明方法。

這裡所討論的事實和觀念不作很大的改變就可以應用到其他演繹理論上去。在下一節中，我們將以較一般的方式來描述它們^{④⑤}。

§38. 演繹法定律；演繹科學的形式特性

*我們考慮建立在一個基本詞項和公理的系統之上的任意的演繹理論。為了使我們的問題簡單化，我們設這一理論只假定邏輯，就是說，邏輯是在這一給定的理論之前的唯一理論（參看 §36）。設想在我們的理論的所有命題中，基本詞項都代之以適當的變項（像在 §37 中一樣，為了簡單，我們不考慮包含被定義項的定理）。這種理論的命題變成了語句函項，其中包含着那些代替基本詞項的符號作為自由變項，而且只包含邏輯常項。當給定了某些東西的時候，我們可以確定它們是否滿足我們的理論的所有公理，或者更精確地說，是否滿足由那些公理所得到的語句函項（也就是說，

當我們用這些事物的名字來代替自由變項時，這些語句函項是否成為真的語句，參看 §2)。如果是這樣，我們說這些被研究的事物構成我們的演繹理論的公理系統的一種模型或實現；有時候我們也說它們構成了這個演繹理論本身的一種模型。以類似的方式，我們可以確定，這些給定的事物是否不僅滿足這一公理系統，而且滿足我們的理論的其他命題系統，於是可以確定它們是否構成這一系統的一種模型（並不排除這一系統只包含一個命題的情形）。

例如，給定的理論的基本詞項所代表的那些事物構成這一公理系統的一種模型，因為我們假定所有公理都是真的語句；這種模型自然滿足我們的理論的所有定理。但是就我們的理論的結構而言，這一模型在所有模型之中並不占有特殊地位。當我們由公理推出一些定理來的時候，我們並不考慮這一模型的特殊性質，我們只利用那些在公理中明顯陳述的性質，因而也就是屬於這一公理系統的每個模型的性質。所以我們的理論的某一定理的每一證明都可以推廣到公理系統的每一模型，因而可以變成一個更一般的論證，它不再是屬於我們的理論的，而是屬於邏輯的；而且由於這一推廣，我們得到了一個一般性的邏輯命題（像前一節中定律 I' 與 II' 一樣），它確定了這一事實，即有關的定理是我們的公理系統的每一個模型都滿足的。最後得到的結論可以陳述如下：

一個給定的演繹理論的公理系統的任一模型滿足這個理論的每一定理；並且對應於每一定理存在着一個一般性的命題，它在邏輯中可以陳述和證明，並且它確立了下列事實，即任一模型都滿足有關定理 ④⑤。

我們這裡有着一條屬於演繹科學方法論範圍的一般定律，當我們用更精確的方式加以陳述時，這條定律被稱作演繹法定律（或

演繹定理)①。

這一定律的重大的實際意義乃在於這一事實，即我們時常可以不離開演繹科學的範圍，而找出某一特殊理論的公理系統的各种模型。為了要得到這樣一個模型，只要從其他某一演繹理論（這一理論可以是邏輯或假定邏輯的一種理論）中選出某幾個常項使它們在公理中代替基本詞項，並說明這樣得到的語句是那一理論中確立的命題。在這種情形下，我們說我們在另一理論中找到了原來的理論的公理系統的一個解釋（在特殊情形下，選出的常項可能屬於原來考慮的理論，在這種情形之下，某些基本詞項可能保持不變，於是我們說，給定的公理系統在被考慮的理論之中，找到一個新的解釋）。我們也將使原來的理論的定理經過類似的變換，將所有基本詞項都代之以那些在建立公理的解釋時已經用過的常項。根據演繹法定律，我們可以事先確信，這樣得到的語句是新的理論中的確立的命題。這一點我們可以陳述如下：

在一個給定的公理系統的基础之上所證明的一切定理對於這一系統的任一解釋都是有效的。

對於這些變換了的定理中的任一個給以證明都是多余的；這是一種純粹機械性質的工作，只要把公理和定理所經過的變換施加在原來的理論中的相應的論證上就可以了。可以說，一個演繹理論中的每一個證明都包含着無限個類似的證明。

上面所說的事實由節省人類思想的觀點說明了演繹法的巨大價值。它們在演繹科學方法論中為不同的論證和研究建立了基礎，只就這點來說，也是有很大的理論價值的^②。特別是演繹法定律，它是一切所謂凭借解釋的證明的理論基礎。在上一節中，我

① 這條定律著者原是作為一條一般的方法論公設加以陳述的，後來證明在各種不同的特殊演繹理論中都能成立。

們遇到过一个这种证明的例子；我們在本书的第二部分将遇到各种其他的例子。

为了精确起見，需要补充說明，这里所讲的适用于任何以邏輯为前提的演繹理論，至于將它們应用于邏輯本身，則会造成一些困难，这些困难我們在这里不討論了。如果一种演繹理論不仅以邏輯为前提，也以其他理論为前提，上面的說明就将具有更复杂的形式。

这里所討論的方法論方面的現象的共同来源就是前一节中指出的事实，就是說，在构造一种演繹理論时，我們忽略公理的意义，而只考虑它們的形式。由于这种原因，当人們談起这些現象时，人們就談到演繹科学和这些科学中的推理的純粹形式的特性。

有时我們发现一些以諄論式的和夸張的方式来強調数学的形式性的說法；虽然基本上是对的，这些說法可能造成模糊和混乱。有时我們听到或甚至于讀到下面的說法，即数学的概念沒有具体内容；在数学里我們不知道我們討論的是什么，对于所作的判断是否真也沒有兴趣。我們必須批判地看待这些判断。如果在构造一种理論时，我們在做法上宛如不了解这一学科的詞項的意义，这不等于否认这些詞項有意义。有时我們发展一种演繹理論而对于它的基本詞項不賦与任何固定的意义，这样就是将这些基本詞項看作变項，在这种情形之下，我們說我們將这一理論看作一种形式系統^{④⑤}。但这是比較少見的情形（即使考虑到 §36 中对于演繹理論的一般刻划中所說的也是如此）。仅当对于这一理論的公理系統可能給以几种解釋时，这种情形才会发生，也就是說，如果对于这一理論中的詞項可以有几种不同的方式賦与意义，而我們不願意特別着重任何一种时，才会发生。另一方面，一种不可能給以任何解釋的形式系統是沒有人对它感到兴趣的^{④⑥}。

最后我們要提到关于数学学科的解釋的某些有兴趣的例子。

这些例子比 §37 中所讲到的要重要得多。

算术的公理系統可以在几何中得到解釋。給定任一直綫时，可以定义一些在它的点之間，和对于这些点施加的运算之間的关系，而这些关系是能滿足算术的全部公理的（从而也滿足所有的定理）。而这些公理原来是关于数与数之間和关于数的运算之間的相应的关系的（这与 §33 中所提到的一种情形密切相关，即在一條綫上的点与所有的数之間可以建立一一对应）。反过来，几何的公理系統在算术中也可以得到解釋。这两項事实的应用是多方面的。例如几何图形可以用来給出算术中各种事实的可見的像（这就是称作图解法的方法）。另一方面我們可以利用算术或代数的方法来研究几何事实。几何有一个称作解析几何的分支，专门从事这一类的研究。

我們在前面已經看到，算术可以作为邏輯的一个部分而构造出来（参看 §26）^{④⑤}。但是如果我們將算术看作一个建立在它自己的基本詞項和公理系統之上的演繹的理論，它与邏輯的关系可以描述如下：算术在邏輯中可以得到解釋（假定邏輯中包括无穷公理，参看 §26）；換句話說，在邏輯中可以定义出那些滿足算术的所有公理，从而也滿足算术的所有定理的概念。如果我們記得，几何在算术中可以有解釋，我們就得出結論說，几何在邏輯中也可以得到解釋。所有这些都是从方法論的观点来看，特別重要的事实。*

§39. 公理与基本詞項的选择；它們的独立性

我們現在討論一些带有特殊性的問題，而这些問題是有关演繹法的基本組成部分的，即基本詞項与公理的选择和定义与证明的构造。

一个需要了解的很重要的事实是在基本詞項和公理的选择

中，我們有很大程度的自由。認為有某些表达式用任何方式都不能定義，有某些命題在理論上不能證明，是錯誤的。設一個給定的理論有兩個語句系統，如果第一個系統中的每一個語句都可以從第二個系統中的語句，以及在先的理論的定理中推出，並且第二個系統中的每一語句可以從第一個系統的語句中推出，我們稱這兩個系統是等價的（如果任何語句在兩個系統中都出現，那麼它們自然不需要加以推导）。設某一個演繹理論是建立在某一公理系統之上，並在構造過程中，我們遇到一個與該公理系統等價的命題的系統。（在 §37 中所討論的關於綫段全等的微型理論中，可以找到具體的例子。很容易證明，它的公理系統與公理 I 和定理 I, II 所構成的系統等價。）如果從理論的觀點來看，有這種情形，那麼可以重新構造整個的理論，而使新的系統中的命題成為公理，原來的公理成為定理。甚至於這些新公理可能在最初看起來並不顯然，這也是不重要的。因為每一語句當它從其他顯然的語句中以令人信服的方式推导出來時，就在一定程度上變成顯然的。所有這些——加以必要的變更——同樣適用於一個演繹理論的基本詞項。這些詞項的系統可以用有關的理論的任何其他的詞項系統來代替，只要這兩個系統是等價的，也就是第一個系統中的詞項可以用第二個系統中的詞項和在先的理論中的詞項加以定義，反之亦然。我們決定選出某一公理和基本詞項的系統而不選另一系統，並不是由於理論上的理由（或者至少不僅是由於理論上的理由）；其他的因素——實踐方面的、教學方面的，甚至於美學方面的在這裡起着作用。有時這是一個選出最簡單的基本詞項和公理的問題，然後或者我們希望基本詞項和公理愈少愈好，或者我們希望要一些基本詞項和公理，這些基本詞項和公理能夠以最簡單的方式來定義一個我們特別有興趣的給定的理論的詞項，和證明其中的命

題^{④⑤}。

另一問題與上面所說的密切相關。基本上我們企圖得到一個不包含多余的命題的公理系統，而所謂多余的，就是可以由其余的公理推出，因而可以算作構造中的理論的定理的。這種公理系統稱作獨立的（或公理彼此獨立的系統）。我們同樣也注意使得基本詞項系統是獨立的，就是說，它不包含任何可以用其他詞項定義的多余的詞項。但時常由於實踐的或教學上的理由，我們並不堅持這些方法論方面的原則，特別是當着如果省去了一個多余的公理或基本詞項就會使理論的構造變得很複雜的時候。

§40. 定義與證明的形式化，形式化的演繹理論

我們有理由認為演繹方法是構造科學時所用的方法中最完善的一個^{④⑥}。它在很大程度上消除了誤差和模糊不清之處，而不會陷於無窮倒退。由於這個方法，對於一個給定的理論的概念的內容和定理的真實性提出懷疑的理由大為減少，最多只對於少數基本詞項和公理而言，仍舊存在。

但對於這一說法需要有一項保留，僅當所有的定義和證明都完全能完成它們的任務，也就是僅當定義能使所有被定義的詞項的意義都完全清楚，而且證明能完全令人信服地說明了所有待證明的定理的有效性時，演繹法的应用才能得到預期的結果。要檢查定義和證明是否真正滿足了這些要求並不是一件容易事。例如很可能對某一個人來說是令人信服的論證，對另外一個人來說，卻是不可理解的。為了消去在這方面引起懷疑的根源，現代方法論在檢查定義和證明時，努力用客觀性質的標準來代替主觀的估價，完全根據定義和證明的結構，也就是它們的外形來判定它們是否正確。為了這個目的，特別提出了定義規則和證明規則（或推理規

則)。第一种告訴我們那些作為所考慮的理論中的定義的語句要具有什么样的形式，第二种描述了為了從這一理論的某些命題推出另外一些命題時，所要經過的變換。每條定義必須按照定義規則來下，每一個證明必須是完全的，也就是說，它必須包含着證明規則對於已經承認為真的語句的一系列的應用（參看 §11 與 §15）。這些新的方法論的公設可以稱作定義與證明的形式化的公設。按照這些新的公設構造起來的學科稱作形式化的演繹理論①⑥⑦。

由於這種形式化的公設，數學的形式特性大為增加。還在演繹方法發展的早期，在構造一門數學學科時，我們已經假定地忽略該學科所特有的一切表達式的意義，宛如這些表達式都已經用變項來代替，而缺乏任何獨立的意義。但至少對於邏輯概念我們是可以賦與習用的意義的。這樣，一種數學學科的公理和定理如果不是作為語句來處理，至少是作為語句函項來處理，也就是作為具有語句的語法形式、而表達事物的某些性質或事物間的某些關係的表達式。從已經被接受的公理（或已經證明的定理）推出一條定理就是證明所有滿足公理的事物也滿足有關的定理；數學的證明和日常生活中的考慮相去不遠。但現在却是全部忽略在給定的學科中所遇到的所有表達式的意義。並且我們認為在構造一種演繹理論時，可以認為這一理論中的語句是沒有任何內容的符號的組合⑧⑨；而每一證明則是使公理或已證明的定理經過一系列外形上的變換。

根據現代的需要，邏輯之作為數學的基礎有其更深刻的意義。

① 最先使演繹理論具有形式化形式的人是弗萊格，前面已兩次引用到他（參看第 16 頁 §7 注 ②）。在已故的波蘭邏輯學者列斯尼夫斯基（S. Leśniewski, 1886—1939）的著作中，形式化的過程達到了非常高的程度。他的成就之一是關於定義規則的精確而完全的陳述。

我們不再滿足于下面的想法，即认为由于天生的或后天获得的正确思維的能力，我們的論证是符合邏輯的規則的。为了对于一条定理作出完全的证明，这就必須將证明規則所規定的变换不仅应用在我們所研究的理論的命題之上，而且应用到邏輯命題之上（以及其他的在先理論之上），并且为了这个目的，我們必須把可以用到证明上去的所有邏輯定律全部列举出来。

至少在理論上可以說，只是由于演繹邏輯的发展，我們今天能够使每一門数学学科都具有形式化的形式 $\oplus$ 。但是在實踐上仍有很大的問題，精确性和方法論的正确性的增加却使明白性和可理解性受到損失 $\ominus$ 。整個問題是比較新的，有关的研究还没有結束，我們有理由希望，进一步的研究將得到根本的簡化。所以如果現在在一門数学的通俗讲述中完全按照形式化的公設去做是为时过早的。特别是如果要求某一門数学的一本普通教本的定理的证明都具有完全的形式，那是不合理的。但我們可以期望一本教本的作者在直观上完全确定，所有他的证明都能变成那种形式，并且甚至于讲到一定的地步，使得一个在演繹思維方面有一些經驗并且有充足的現代邏輯知識的讀者能够不太困难就填補上那些空隙。

§41. 一个演繹理論的无矛盾性与 完全性；判定問題

我們現在来考虑两个方法論方面的概念，这两个概念从理論的观点来看，十分重要，而在实用上是意义很小的。这些就是无矛盾性与完全性的概念。

一个演繹理論称作无矛盾的或一致的，如果在这一理論中，沒有两个确立的命題互相矛盾，換言之，如果在两个互相矛盾的語句

之中(參看 §7), 至少有一个是不能证明的。一个理論称作完全的, 如果在两个由这一理論(以及在它前面的理論)的詞項陈述出来而且互相矛盾的語句之中, 至少有一个是在这个理論中能够证明的。如果一个語句的否定在一个給定的理論中是能够证明的, 則我們时常說, 这一語句在这个理論中能够被否定。利用这一術語, 我們可以說, 一个演繹理論是无矛盾的, 如果在其中沒有任何語句是既能证明又能否证的; 一个理論是完全的, 如果其中的每一語句或者能够证明或者能够否定。“无矛盾的”和“完全的”这两个詞不仅可应用于一种理論, 而且可应用于作为这一理論的基础的公理系統。

現在讓我們对于这两个概念的含义得出一个清楚的概念。对于一个学科, 如果我們有理由怀疑, 并非其中的所有确立的命題都是真的, 則即使这一学科在方法論的各方面都是正确地构造起来的, 它在我們眼里也将失去价值。另一方面, 在一个学科之中, 能证明的真語句的数目愈多, 則这一学科的价值愈大^{⑧⑨}。由这一观点来看, 如果一个学科在它的确立的命題之中, 包括了所有与这个理論有关的真語句, 而不包括任何假的語句, 則这一学科可以算作理想的。在这里一个語句算作相关的, 如果它是完全由現在所考虑的学科的詞項(及它在前的学科的詞項)陈述出来的。归根到底, 举例說, 我們不能期望在算术中能够证明那些包含化学或生物学的概念的真的語句。現在設一个演繹理論是矛盾的, 也就是說, 在它的公理与定理中有两个互相矛盾的語句; 根据一条著名的邏輯定律, 即矛盾律(參看 §13), 这两个語句之中必定有一个是假的。如果另一方面, 我們假定这个理論是不完全的, 那么就是有着两个相关而互相矛盾的語句, 其中的任何一个都不能证明, 而根据另一条邏輯定律, 即排中律, 这两个語句之中必定有一个是真的。我們由此看出, 一个演繹理論如果不是既无矛盾又完全, 就不能达

到我們的理想^{③④}。(我們并不是要說, 每一個既無矛盾又完全的學科必定事實上是我們的理想的實現, 也就是說, 它必定在它的确立的命題中包含了所有真的語句和只是這些語句^{⑤⑥}。)

我們所考慮的問題還有另外的一面。任一演繹科學的發展都是利用這一科學中的詞項陳述出下列類型的問題, 即: 情形是這樣嗎? 然後根據已經假定的公理, 設法判定這些問題。這一類型的問題顯然可以判定為兩種可能中的一種, 即肯定的或否定的。在第一种情形下, 答案是“情形是這樣”, 在第二种情形下, 答案是“情形不是這樣”。一個演繹理論的公理系統的無矛盾性和完全性就保證了上面所說的那種問題的每一個在這一理論中可實際加以判定, 並且只能以一種方式判定。無矛盾性排除任何問題以兩種方式判定的可能性, 即既肯定又否定, 而完全性則保證至少可有一種方式加以判定。

和完全性問題緊密相連的是另外一個更一般的問題, 一個與不完全的與完全的理論都有關的問題。這個問題就是對於給定的演繹理論找出一個一般的方法, 使我們能夠判定由這一理論的詞項所構成的任一語句是否能在這一理論中加以證明。這一重要的問題稱作判定問題^①。

只有少數的演繹理論, 我們可能說明它們是無矛盾的和完全的。它們一般都是邏輯結構簡單, 包含概念不多的初等理論。第II章中已經討論過的語句演算是例子。假如我們把它看作一個獨立的理論而不看作邏輯的一部分(但是當我們把“完全的”這一詞應用到這一理論時, 意義略有改變)。既無矛盾又完全的一個

① 希爾伯特特別強調這一節中所討論的概念和問題的意义——特別是無矛盾性與判定問題的概念。他推動了數學基礎方面許多重要研究。由於他的倡議, 這些問題近來成為許多數學家 and 邏輯學家大力研究的對象。

最有兴趣的例子可能是初等几何。这里所說的几何是限于若干世紀以来作为初等数学的一部分在中等学校中讲授的内容，也就是說，是一門研究各种特殊的几何图形如直綫、平面、三角形、圓等性质，而不考虑几何图形的一般概念（点的集合）。^① 我們要是考虑算术和高等几何，情形就根本不同。可能研究这些科学的人沒有人怀疑它們的无矛盾性，但是根据最近方法論方面的研究，关于它們的无矛盾性的一个严格的证明遇到了带有根本性的困难。完全性的情形更糟，算术和高等几何已被发现是不完全的，因为可以构造出一些算术的或几何的問題，而这些問題在这些学科中既不能加以肯定地判定，也不能否定地判定^{②③}。也許可以設想，这一事实的产生是由于我們現有的公理系統和证明方法有缺点，作适当的改进后（如扩充公理系統），在将来可能得到完全的系統。但更进一步的研究已經說明，這項猜測是錯誤的。要想建立一个既无矛盾又完全的演繹理論，其中包括了全部的关于算术或高等几何的真的語句作为它的定理，那是永远不可能的。其次我們发现判定問題在这学科中同样是不能解决的。不可能找到一个一般的方法使我們能够辨别这些学科中哪些語句是可证的，哪些是不可证的。这些結果可以推广到許多別的演繹科学，特别是可以推广到所有那些以整数算术（就是关于整数的四种基本运算的理論）为前提或可以发展出这一理論的那些演繹科学。*例如，这些結果可以应用到类的一般理論（根据 §26 末尾的說明可以推出）。*^④

由于上面所說的，可以了解无矛盾性和完全性的概念虽然在

① 語句演算的完全性的第一个证明（也就是关于完全性的研究的第一个成功）应归功于美国現代邏輯学家波斯特（E. L. Post）。初等几何完全性的证明是著者做出来的。

② 这些极端重要的成就是現代奥地利邏輯学家哥德尔作出来的。他的有关判定問題的結果又經現代美国邏輯学家車尔赤（A. Church）加以扩充。

理論上很重要，而在实际构造演繹科学时却没有什么影响^{⑧⑨}。

§42. 演繹科学方法論的扩大的概念

关于无矛盾性和完全性的研究是使得方法論的研究范围扩充的重要因素，也是使得演繹科学方法論的全部性质发生根本改变的重要因素。本章开头所提出的方法論的概念在这一科学的历史发展过程中，已被发现是太狭了。对于在演繹科学的实际构造中所应用的方法进行分析和估价已不再是方法論的唯一的任务，甚至于已不再是它的重要任务。演繹科学方法論已經变成了一門关于演繹科学的一般性的科学，就像算术是关于数的科学，几何是关于几何图形的科学。在现代方法論中，我們不仅研究构成演繹理論的語句，并且研究这些理論的本身。我們考虑組成这些語句的符号与表达式，表达式与語句的性质和集合，它們中間的关系（例如推出关系），甚至于表达式与它們所“談到”的那些事物的关系（例如指示关系）；我們建立关于这些概念的一般定律。

*因此可以得出这样的結論，就是說，那些指示出現在演繹理論中的表达式以及这些表达式的性质和它們之間的关系的詞項不屬於邏輯的范围，而屬於演繹科学方法論。这特別适用于本书前几章中引入和用过的某些概念，例如“变項”，“語句函項”，“量詞”，“結論”以及其他許多概念。为了使我們对于邏輯的詞項与方法論的詞項之間的区别弄得更清楚一些起見，讓我們来考虑“或”与“析取式”这两个詞。“或”字自然是屬於邏輯的，即屬於語句演算的，虽然它也在所有其他科学中、因此也就在方法論中应用。另一方面，“析取式”这个詞是指示借助于“或”字构造出来的語句，它是方法論的詞項的一个典型的例子。

讀者們也許会感到惊讶，在关于邏輯的各章中，我們应用了这

樣多的方法論中的詞項。但解釋是比較簡單的。一方面，我們在 §9 中已經提過的一種情形在這裡起着重要的作用，這就是在數學家與邏輯學家中間習慣於用包含方法論的詞項的短語作為某些純粹是數學性質或邏輯性質的表達式的同義詞（有時是為了文体的理由），在某種程度上，我們在本書中也是這樣用的。但在另一方面，這裡還有一個更重要的因素；在本書中我們沒有企圖以一種系統的方法構造起邏輯來，而只是談論邏輯，討論和評論它的概念與定律。但我們知道（根據 §18）當我們談論邏輯概念時，我們必須使用這些概念的稱名，也就是哪些已經屬於方法論的詞項。如果我們將邏輯構造為一種演繹理論，而對於它不作任何評論，那些方法論的詞項將只在定義和推理的規則的陳述中出現。*

由於方法論的發展，在這方面需要應用新的更精密的和更準確的探討方法。方法論和構成它的研究對象的那些科學一樣，也具有演繹科學的形式。由於研究範圍的擴充，“演繹科學方法論”這一名詞的本身看起來已不太合適；事實上“方法論”僅指“關於方法的科學”。所以現在時常用其他名詞代替這一名詞，例如“證明論”（這並不太好）或“元邏輯與元數學”（這好得多），這個名詞的含義是和“關於邏輯與數學的科學”差不多是一樣的。還有一個名詞近來開始在使用，就是“邏輯語法與演繹科學的語義學”，這個名詞着重指出了演繹科學方法論與日常語言的文法的相似之處。^①

① 廣義的演繹科學方法論是一門非常年輕的科學。它的顯著的發展是在大約 20 年前才開始的；同時在兩個不同的中心發展起來（看來是彼此獨立的）。這就是哥丁根與華沙，哥丁根是在希爾伯特（參看第 115 頁 §36 注①）與貝爾納斯（P. Bernays）的影響之下，在華沙則有列斯尼夫斯基與路加西維契以及其他一些人在工作着（參看第 128 頁 §40 注①和第 16 頁 §7 注②）。

练 习

1. ⑧⑧第 IV 章中所考虑的类的运算可以作为一个独立的演繹理論构造起来, 并且只假定語句演算, 在这項构造中, 我們將“ $\vee$ ”, “ $\wedge$ ”, “ $\subset$ ”这几个符号和 §25 中所引进的所有的运算符号作为基本詞項。我們并設定下列九条公理^①:

公理 I. $K \subset K$

公理 II. 如果 $K \subset L$ 并且 $L \subset M$, 那么 $K \subset M$

公理 III. $K \cup L \subset M$ 当且仅当 $K \subset M$ 并且 $L \subset M$

公理 IV. $M \subset K \cap L$ 当且仅当 $M \subset K$ 并且 $M \subset L$

公理 V. $K \cap (L \cup M) \subset (K \cap L) \cup (K \cap M)$

公理 VI. $K \subset \vee$

公理 VII. $\wedge \subset K$

公理 VIII. $\vee \subset K \cup K'$

公理 IX. $K \cap K' \subset \wedge$

由这些公理我們可以推出各种定理、試证明下列的定理(利用所附的提示)。

定理 I. $K \cup K \subset K$

提示: 将公理 III 中的“ L ”和“ M ”换成“ K ”, 注意这个等值式的右边是为任一类 K 所滿足的(根据公理 I), 所以左边也必定是永远被滿足的。

定理 II. $K \subset K \cap K$

提示: 这一证明用到公理 IV 与公理 I, 并与定理 I 的证明

① 这里給出的公理系統主要是习玉德的工作(参看第 84 頁 §27 注①)。現代美国数学家亨丁頓(E. V. Huntington)曾发表了若干种类的演算的简单的和有兴趣的公理系統。有一些关于邏輯和数学理論的公理基础的重要貢獻也应归功于他。

相似。

定理 III. $K \subset K \cup L$ 并且 $L \subset K \cup L$

提示: 在公理 III 中以“ $K \cup L$ ”代“ M ”, 注意由于公理 I, 这个等值的左边是永远被滿足的。

定理 IV. $K \cap L \subset K$ 并且 $K \cap L \subset L$

提示: 这一证明与定理 III 的证明相仿。

定理 V. $K \cup L \subset L \cup K$

提示: 在公理 III 中以“ $L \cup K$ ”代“ M ”。并将这样得到的等值式的右边与定理 III 比較(其中“ K ”代之以“ L ”, “ L ”代之以“ K ”)。

定理 VI. $K \cap L \subset L \cap K$

提示: 这个证明根据公理 IV 和定理 IV, 并与定理 V 的证明相仿。

定理 VII. 如果 $L \subset M$, 那么 $K \cup L \subset K \cup M$ 。

提示: 設这一定理的題設成立, 而推出下列的公式:

$$K \subset K \cup M \text{ 并且 } L \subset K \cup M$$

(第一个公式可由定理 III 直接得出, 第二个公式則可以利用公理 II, 由題設及定理 III 推出)。应用公理 III 于这些公式。

定理 VIII. 如果 $L \subset M$, 那么 $K \cap L \subset K \cap M$ 。

提示: 这个证明与前一定理的证明相仿。

定理 IX. $K \cap L \subset K \cap (L \cup M)$ 并且 $K \cap M \subset K \cap (L \cup M)$ 。

提示: 在定理 III 中, 将“ K ”换成“ L ”, 将“ L ”换成“ M ”, 然后再应用定理 VIII。

定理 X. $(K \cap L) \cup (K \cap M) \subset K \cap (L \cup M)$

提示: 这一定理可由公理 III 及定理 IX 推出。

在以上定理的证明中起最重要的作用的公理 III 与 IV 称作合成律(对于类的加法和乘法而言)。

2. 在前一习题中所构造的类的运算中, 我們可以引进等号“=”, 并定义如下:

定义 I. $K=L$ 当且仅当 $K \subset L$ 并且 $L \subset K$.

試由习题 1 中的公理和定理以及上述定义推出下列定理:

定理 XI. $K=K$

提示: 将定义 I 中的“ L ”换成“ K ”并应用公理 I.

定理 XII. 如果 $K=L$, 那么 $L=K$.

提示: 将定义 I 中的“ K ”换成“ L ”, 将“ L ”换成“ K ”. 将这样得来的結果与原来的定义 I 作比較.

定理 XIII. 如果 $K=L$ 并且 $L=M$, 那么 $K=M$.

提示: 这一定理可由定义 I 及公理 II 推出.

定理 XIV $K \cup K = K$

提示: 将定义 I 中的“ K ”代之以“ $K \cup K$ ”, 并将“ L ”代之以“ K ”; 应用定理 I 及定理 III (其中“ L ”代之以“ K ”).

定理 XV $K \cap K = K$

提示: 这一证明与前一定理的证明相仿.

定理 XVI $K \cup L = L \cup K$

提示: 由定理 V 我們有:

$$K \cup L \subset L \cup K \text{ 和 } L \cup K \subset K \cup L$$

对这些公式应用定义 I.

定理 XVII $K \cap L = L \cap K$

提示: 这一证明与定理 XVI 的证明相仿.

定理 XVIII. $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$.

提示: 这一定理可由定义 I, 公理 V 与定理 X 推出.

定理 XIX $K \cup K' = \vee$

提示: 这一定理可以借助于定义 I, 由公理 VI (其中“ K ”代之

以“ $K \cup K'$ ”)及公理 VIII 推出。

定理 XX $K \cap K' = \wedge$

提示: 应用定义 I, 公理 VII 和公理 IX。

注意这一习题和前一习题中的公理和定理哪些是第 IV 章(或者可能是第 III 章)中已經有的; 回忆它們的名称。

3. 設在习题 1 与习题 2 中所討論的类的运算的系統中引进一个新符号“ χ ”, 用以代表类之間的某种关系, 并定义如下:

$K \chi L$ 当且仅当 $K \subset L$, $L \subset K$ 与 $K \cap L = \wedge$ 均不成立。

这样定义的关系是否与 §24 中所定义的有些关系相同? 令符号“()”代表各类之間互不相交的关系。如何在我們的类的运算的系統中定义这一符号?

4. 試举出 §37 中所考虑的公理系統在算术及几何中的几种解釋。

由一切数构成的集合, 加上小于关系是否是这一公理系統的一个模型? 由一切直綫构成的集合加上直綫間的平行关系是否是这种模型之一?

5. 在 §37 中所討論的几何的片断中, 綫段間的較短关系可定义如下:

我們說 x 較 y 为短, 記作: $x < y$; 如果 x 与 y 是綫段并且如果 x 与一个綫段全等而这一綫段是 y 的一部分; 換言之, 如果 $x \in S$, $y \in S$ 并且如果存在 z 而使得 $z \in S$, $z \subset y$, $z \equiv x$ 并且 $x \cong z$ 。

区别这个句子中的被定义者与定义者。判定在定义者之中出現的詞項屬於什么学科(或者屬於邏輯的那一部分)。这一定义是否符合 §36 中的方法論的原則和 §11 中的定义規則?

6. 如果只考虑 §15 中所讲的证明規則, §37 中定理 I 的证明是否是一个完全的证明?

7. 除定理 I 与 II 以外, 下列的定理可由 §37 的公理中推出:

定理 III. 对于集合 S 中的任意的元素 x, y 与 z , 如果 $x \cong y$ 并且 $x \cong z$, 那么 $y \cong z$.

定理 IV. 对于集合 S 中任意的元素 x, y 与 z , 如果 $x \cong y$ 并且 $y \cong z$, 那么 $z \cong x$.

定理 V. 对于集合 S 中的任意的元素 x, y, z 与 t , 如果 $x \cong y$, $y \cong z$, 并且 $z \cong t$, 那么 $x \cong t$.

对于下列的語句系統与公理 I 和 II 所組成的系統的等价性 (如 §39 中所定义者) 給以严格的证明 (所以每一个都可以用来作为一个新的公理系統):

- (a) 由公理 I 与定理 I 和定理 II 所組成的系統;
- (b) 由公理 I 与定理 III 所組成的系統;
- (c) 由公理 I 与定理 IV 所組成的系統;
- (d) 由公理 I 与定理 I 和定理 V 所組成的系統。

8. 按照 §37 中所讲的方法, 陈述出关系理論的一般定律, 作为前面习题中所得到的結果的推广。

提示: 例如这些定律可以具有等值式的形式, 而开头一段話为:

关系 R 是自反的并且在类 K 中具有性质 P , 当且仅当...

9. 考虑习题 7 中的語句系統(a)、指出滿足下列条件的模型:

- (a) 滿足这一系統的前两个語句, 但不滿足末一个;
- (b) 滿足第一个与第三个, 但不滿足第二个;
- (c) 滿足后两个, 但不滿足第一个。

由三个語句中的任意两个可以推出其他一个, 这样的模型是存在的, 由这一事实可以得出什么結論? 这些語句是否彼此独立? (参看 §37 与 §39)。

10. 有时候有这种抱怨，就是說，在不同的几何教本中有着差異，即有的教本中当作定理的語句，在其他教本中却采用作公理，从而不給出证明，这种抱怨有根据嗎？

*11. 在 §13 中我們熟悉了真值表的方法，这一方法使我們能够在任一特殊情形中判定語句演算中的一个給定的語句是否是眞的，因而是是否可以承认为这一演算中的一条定律。在应用这一方法时，对于那些在真值表中出現的符号“T”与“F”，我們可以完全忘却原来賦与它們的意义，我們可以設定，这一方法主要是在构造語句演算时应用两条規則，第一条接近于定义的規則，第二条接近于证明的規則。按照第一条規則，如果我們要在語句演算中引进一个常項，我們必須构造出包含这个項的最簡單的(同时也是最一般的)語句函項的基本真值表。按照第二条規則，如果我們要肯定一个語句(只包含那些基本真值表已經构造出来的常項)是語句演算的定律，我們必須为这个語句构造出一个导出真值表并证实符号“F”在这个表的末一行中从不出現。

只用这两条規則构造出来的語句演算具有与形式化的演繹理論相近的性质。試根据 §40 中所讲的来证明这一命題。但注意这一构造語句演算的方法与 §36 中所討論的构造演繹理論的一般原則的不同之处。利用現在所考虑的方法，是否可能在語句演算中分別基本詞項与被定义詞項？有哪些区别在这里分不出来？

*12. 应用上一习题中所描述的真值表方法，我們可以在語句演算中引入一些在第 II 章中沒有討論的新的詞項，例如我們可以引进符号“ Δ ”，而将下列語句函項：

$$p \Delta q$$

看作

既非 p 又非 q

这一表达式的縮写。

构造出符合符号“ Δ ”的直观意义的真值表，并且借助于导出真值表，证实下列的語句是真的并且可以肯定为語句演算的定律：

$$(\sim p) \leftrightarrow (p \Delta p).$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow [(p \Delta q) \Delta (p \Delta q)]$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \{[(p \Delta p) \Delta q] \Delta [(p \Delta p) \Delta q]\}$$

*13. 存在一个將語句演算构造成为一个形式化的演繹理論的方法，这个方法与习题 11 中所描述的不同，而完全符合 §36 与 §40 中所提出的原則^①。例如我們可以設符号“ $\rightarrow$ ”，“ $\leftrightarrow$ ”与“ $\sim$ ”为基本詞項，并設下列七个語句为語句演算的公理：

$$\text{公理 I. } p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\text{公理 II. } [p \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\text{公理 III. } (p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$\text{公理 IV. } (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\text{公理 V. } (p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\text{公理 VI. } (p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)]$$

$$\text{公理 VII. } [(\sim q) \rightarrow (\sim p)] \rightarrow (p \rightarrow q)$$

其次，我們同意在证明中应用两条推理規則，这两条規則是我們已經熟悉的，即代入規則与分离規則。（为了十分精确地陈述这些規則，特別是代入規則，我們必須确定用括弧的方法，并規定在我們的演算中，把那些表达式看作是語句函項，从而可以用来替换变項。這項工作是不太困难的。）

借助于这些推理規則，我們現在可以从我們的公理推出一些

① 这个方法来源于弗萊格(參閱第 16 頁注②)。

定理、給出下列定理的完全证明 (利用在它們后面的提示。)

定理 I. $p \rightarrow p$

提示: 在公理 I 与 II 中, 以“ p ”代替“ q ”; 注意这样得出来的第一个語句与第二个語句的前件完全一样, 于是应用分离規則。

定理 II. $p \rightarrow \{(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q]\}$

提示: 在公理 I 中, 用“ $(p \rightarrow q)$ ”代替“ q ”; 在公理 III 中将“ p ”, “ q ”与“ r ”分別代之以“ $(p \rightarrow q)$ ”, “ p ”及“ q ”, 注意这样得到的第一个蘊函式的后件与第二个蘊函式的前件相同。現在在公理 III 中, 用第二个蘊函式的前件代替“ q ”并且用它的后件代替“ r ” (作为第一个蘊函式的前件的“ p ”不变)。然后应用分离規則两次——这一证明是以公理 III 为根据的推理的标准例子, 而公理則 III 是假言三段論定律的另一形式 (参看 §12)。

定理 III. $p \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q]$

提示: 这一证明与定理 II 的证明相仿。利用代入由公理 II 推出下列語句:

$$\{(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q]\} \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q]$$

将这一語句的前件与定理 II 的后件作比較; 于是在公理 III 中作适当的代入, 并应用分离規則两次。

定理 IV. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$

提示: 利用代入由公理 III 推出下列語句:

$$(1) \quad [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow \{[(q \rightarrow r) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)\}$$

其次, 在公理 III 中, 将“ p ”, “ q ”与“ r ”分別代之以“ q ”, “ $[(q \rightarrow r) \rightarrow r]$ ”与“ $(p \rightarrow r)$ ”。注意这样推出来的蘊函式的前件可以在定理 III 中进行代入而得到。进行这一代入并应用分离規則而推出:

$$(2) \quad \{[(q \rightarrow r) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)\} \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

注意 (1) 的后件与 (2) 的前件相同; 然后像定理 II 的证明中一

样来进行(再应用公理 III)——定理 IV 称作交換律。

定理 V. $(\sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

提示：利用代入由公理 I 得出

$$(\sim p) \rightarrow [(\sim q) \rightarrow (\sim p)]$$

注意这一語句的后件与有一条公理的前件相同，然后像定理 II 的证明中一样去做。

定理 VI. $p \rightarrow [(\sim p) \rightarrow q]$

提示：在定理 IV 中进行代入而使由此得到的蘊函式的前件将是定理 V，然后应用分离規則——我們在这里有着一个以交換律为根据的推理的标准例子。

定理 VII. $[\sim(\sim p)] \rightarrow (q \rightarrow p)$

提示：这一证明与定理 II 的证明相仿。由定理 V 及公理 VII 推出：

$$[\sim(\sim p)] \rightarrow [(\sim p) \rightarrow (\sim q)] \text{ 和 } [(\sim p) \rightarrow (\sim q)] \rightarrow (q \rightarrow p)$$

比較这些語句的前后件。

定理 VIII. $[\sim(\sim p)] \rightarrow p$

提示：与定理 VI 的证明一样，先由定理 IV 与 VII 中推出下列語句：

$$q \rightarrow \{[\sim(\sim p)] \rightarrow p\}$$

在这一語句中，用我們的公理中的任一条代替“q”，并应用分离規則。

定理 IX. $p \rightarrow [\sim(\sim p)]$

提示：在公理 VII 及定理 VIII 之中进行适当代入，使得可以应用分离規則。

定理 X. $[\sim(\sim p)] \leftrightarrow p$

提示：在公理 VI 中进行代入并应用分离規則两次，就可以

从公理 VI 与定理 VIII 和定理 IX 推出这一定理。

*14. 如果要能够在前面习题所描述的語句演算的系統中引进被定义的詞項, 我們必須假定一条定义的規則。按照这条規則(参看§11), 每一定义都具有等值式的形式。被定义者是一个表达式, 其中除語句变項外, 只包含一个常項, 即被定义的詞項; 并且沒有一个符号在这个表达式中可以出現两次。定义者是一个任意的語句函項, 其中剛好包含着与被定义者之中相同的变項, 并且所包含的常項只限于基本詞項和前面已定义的詞項, 例如, 我們可以承认下列关于符号“ $\vee$ ”与“ $\wedge$ ”的定义:

定义 I. $(p \vee q) \leftrightarrow [(\sim p) \rightarrow q]$

定义 II. $(p \wedge q) \leftrightarrow \{\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]\}$

借助于代入規則和分离規則, 由上述定义以及习题 13 中的公理和定理, 推出下列的定理:

定理 XI. $[(\sim p) \rightarrow q] \rightarrow (p \vee q)$

提示: 在公理 V 中, 以“ $(p \vee q)$ ”代替“ p ”并且以“ $[(\sim p) \rightarrow q]$ ”代替“ q ”; 将这样得出的語句与定义 I 作比較并应用分离規則。

定理 XII. $p \vee (\sim p)$

提示: 应用代入規則两次和分离規則一次, 可以从定理 XI 和定理 I 中推出这一定理。

定理 XIII. $p \rightarrow (p \vee q)$

提示: 这一证明是建立在公理 III 和定理 VI 与定理 XI 之上的, 并与定理 II 的证明很相似(只对于公理 III 应用了代入規則)。

定理 XIV. $(p \wedge q) \rightarrow \{\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]\}$

提示: 这一建立在公理 IV 和定义 II 之上的证明是与定理 XI 的证明相似的。

定理 XV. $\{\sim[\sim(p \wedge q)]\} \rightarrow \{\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]\}$

提示：这一证明是建立在公理 III 和定理 VIII 与定理 XIV 之上的，并与定理 II 的证明相仿。在定理 VIII 中，以“ $(p \wedge q)$ ”代替“ p ”并将由此得来的蕴函式的后件与定理 XIV 的前件相比較。

定理 XVI. $[(\sim p) \vee (\sim q)] \rightarrow [\sim(p \wedge q)]$

提示：在公理 VII 中进行代入，使得由此得来的蕴函式的前件成为定理 XV。

定理 XVII. $(\sim p) \rightarrow [\sim(p \wedge q)]$

提示：这一证明是与定理 II 的证明相仿的。在定理 XIII 中以“ $(\sim p)$ ”代替“ p ”，以“ $(\sim q)$ ”代替“ q ”；并将由此得来的語句与定理 XVI 相比較。

定理 XVIII. $(p \wedge q) \rightarrow p$

提示：由公理 VII 及定理 XVII 中推出此定理。

注意这一习题和前一习题中的公理和定理那些是我们在第二章中已经熟悉的，并回忆它们的名称。

*15. 按照前一习题中给出的定义規則，陈述符号“ Δ ”的定义（参看习题 12），在定义者之中必須出現两个常項：“ $\sim$ ”与“ $\wedge$ ”。

*16. ⑧⑨ 利用真值表的方法证明习题 13 与 14 中所有的公理与定义、以及习题 15 中提出的定义都是真的語句。試由此作出下列的結論，即所有应用代入規則与分离規則由上述的公理与定义推出的定理在用真值表方法加以檢驗时都被发现为真的語句。

（也可以证明，語句演算中每一个真实性可用真值表方法加以证实的語句或者是公理和定义中的一条，或者是可以利用我們的推理規則由它們推出，因此，在习题 11, 13 和 14 中所討論的两种构造語句演算的方法是完全等值的，但这项工作要困难得多。）

*17. 习题 11, 13, 14 中所討論的构造語句演算的方法之中有一种提供了这一演算的判定問題（参看 §41）的解法，并且使我們

能够很容易說明，語句演算是一种无矛盾的演繹的理論。这个方法是什么？并且如何說明？

*18. 語句演算中有下列的定律：

对于任意的 p 与 q ，如果 p 并且非 q ，那么 q 。

試在这条邏輯定律的基础上，建立下列的方法論的定律：

如果一个以語句演算为前提的演繹的理論的公理系統是矛盾的，那么用这个理論的詞項陈述的所有語句都可以由这个系統中推出来。

*19. 已知下列方法論的定律成立：

如果一个演繹的理論的公理系統是完全的，并且如果在这个系統中加进了一个語句，这个語句是可以在这个理論中陈述出来，但不能加以证明的，那么这样扩充了的公理系統不再是无矛盾的。

为什么？

*20. 把第(II)章中那些按照 §42 中所讲的应当屬於演繹科学方法論範圍的詞項挑出来。

第二部分 邏輯和方法論在 构造数学理論中的应用

(VII) 一个数学理論的构造: 数的次序的定律

§43. 构造中的理論的基本詞項; 关于数 与数之間基本关系的公理

有了邏輯和方法論領域的一些知識供我們使用, 我們現在來着手建立一个特殊的、并且非常初等的数学理論的基础。对于我們, 这将是一个很好的机会, 來較好地消化我們以前获得的知識, 甚至略略加以扩充。

我們將着手的理論构成实数算术的一小部分。它包括关于数与数之間小于和大于两个基本关系的主要定理, 以及数的加法和减法两个基本运算的主要定理。它不假定邏輯以外的任何东西。

在这个理論中, 我們將要采取的基本詞項如下:

实数,
是小于,
是大于,
和。

像早先一样, 我們將簡單地說“数”來代替“实数”。并且以“所有的数构成的集合”这一表达式來代替“数”这一詞項作为基本詞項, 要更方便一些。为簡單起見, 我們將用符号“ N ”來代替“所有的数构成的集合”这一表达式; 这样, 要表示 x 是一个数, 我們就写:

$$x \in N.$$

另一方面, 我們可以規定, 我們的理論的論域只包括实数, 而且变

項“ x ”, “ y ”, ... 只代表数的名字; 在这种情形下, “实数”这一个詞項在表示我們的理論的命題时, 将完全可以省去, 而当需要的时候, 符号“ N ”可以代之以“ $\mathcal{V}$ ”(參看 §23)。

“是小于”和“是大于”这两个表达式的每一个, 将要当作只由单个的字組成的实体来处理; 它們将分別地为比較簡單的符号“ $<$ ”和“ $>$ ”所代替, 我們也将用习用的符号“ $\lessdot$ ”和“ $\gtrdot$ ”来代替“不小于”和“不大于”。此外, 我們將使用习用的符号

$$x + y$$

来代替“数(被加数) x 与 y 之和”或“ x 与 y 相加的結果”。

于是, 符号“ N ”就指一个集合, 符号“ $<$ ”和“ $>$ ”指两个二項关系, 最后, 符号“ $+$ ”指一个二項运算。

我們所考虑的理論的公理可以分成两类, 第一类公理表示小于和大于两种关系的基本性质, 至于第二类公理, 則主要是关于加法的基本性质。現在我們將只考虑第一类公理; 它总共包括五个命題:

公理 1. 对于任何数 x 和 y (也就是, 对于集合 N 的任意二元素) 我們有: $x = y$ 或者 $x < y$ 或者 $x > y$ 。

公理 2. 如果 $x < y$, 那么 $y \lessdot x$ 。

公理 3. 如果 $x > y$, 那么 $y \gtrdot x$ 。

公理 4. 如果 $x < y$ 而且 $y < z$, 那么 $x < z$ 。

公理 5. 如果 $x > y$ 而且 $y > z$, 那么 $x > z$ 。

就像具有普遍性质的、陈述任意数 $x, y, \dots$ 有如此这般一种性质的任何算术定理一样, 这里所列举的公理实在應該以这样的字句如“对于任何数 $x, y, \dots$ ”或者“对于集合 N 的任何元素 $x, y, \dots$ ”或更簡單地, “对于任何 $x, y, \dots$ ”(如果我們同意这里的变項“ x ”, “ y ”, ... 只指数) 开始, 但是因为我們要遵从 §3 所討論

的用法, 我們常常略去这样的短語, 而只是在我們的心中加上它; 这一点不仅适用于公理, 也适用于在我們的討論过程中将要出現的定理和定义。例如, 公理 2 的意思是:

对于任何 x 与 y (或者对于集合 N 的任何元素 x 与 y), 如果 $x < y$, 那么 $y \nless x$ 。

我們將称公理 1 为弱三分律 (以后我們將熟悉强三分律), 公理 2—5 表示关系小于和大于是不对称的和傳遞的 (参看 §29); 因而它們被称作关系小于和大于的不对称律和傳遞定律。第一类公理以及从它們推出来的定理被称为数的次序定律。

关系 $<$ 和 $>$ 以及邏輯上的同一关系 $=$, 在这里将被称作数之間的基本关系。

§44. 基本关系的不自反律; 間接证明

我們的下一步工作是从我們所采取的公理推演出一些定理。因为我們的目的不在系統的介紹, 本章和下章将只陈述这样一些定理, 它們足以說明邏輯領域和方法論領域的某些基本概念和事实。

定理 1. 沒有一个数小于它自己: $x \nless x$ 。

证明: 假定我們的定理是假的。那么必定有一个数 x , 适合公式:

$$(1) \quad x < x.$$

現在公理 2 涉及的是任意的数 x 和 y (两者不必不同), 因此, 如果在“ y ”的位置我們写作变項“ x ”, 公理仍然正确; 于是我們得到:

$$(2) \quad \text{如果 } x < x, \text{ 那么 } x \nless x.$$

但是从 (1) 和 (2) 立即推出

$$x \nless x;$$

然而, 这个推論显然与公式 (1) 矛盾。所以, 我們必須否定原来的假

定,并且承认定理已經证明。

現在我們来表明,如何把这个論证变为一个完全的证明,为清楚起見,我們使用邏輯符号(参看 §13 和 §15)。为了变成完全的证明,我們借助于語句演算中所謂的归謬律:

$$(I) \quad [p \rightarrow (\sim p)] \rightarrow (\sim p) \textcircled{1}$$

我們再用符号化的公理 2:

$$(II) \quad (x < y) \rightarrow [\sim (y < x)]$$

我們的证明完全建立于語句(I)和(II)之上。首先,我們应用代入規則于(I),将其中的“ p ”全都代換以“ $(x < x)$ ”:

$$(III) \quad \{(x < x) \rightarrow [\sim (x < x)]\} \rightarrow [\sim (x < x)]$$

其次,我們应用代入規則于(II),将其中的“ y ”代換以“ x ”:

$$(IV) \quad (x < x) \rightarrow [\sim (x < x)]$$

最后,我們注意,語句(IV)是条件語句(III)的假設,因此可以应用分离規則,这样我們就得到公式:

$$(V) \quad \sim (x < x),$$

这就是所要证明的定理的符号形式。

定理 1 是所謂的間接证明,也称为归謬证明的一个例子。这种证明的特点可以一般地描述如下:要证明一个定理,我們先假定这个定理是假的,然后从这个假定推演出一些結論,它們迫使我們否定原先的假定。在数学中,間接证明非常普遍。不过,它們并不完全属于定理 1 的证明的那种模式;相反地,定理 1 的证明代表間接证明的一种比較少見的形式,下面我們將要遇見間接证明的比較

① 这个定律,以及与之具有同名的、相关的定律:

$$[(\sim p) \rightarrow p] \rightarrow p,$$

在邏輯和数学的許多复杂的、和历史上重要的論证中,曾經应用过。意大利的邏輯家和数学家伐拉第(G. Vailati, 1863—1909)有一篇专論,專門論述它的历史。

典型的例子。

我們所采取的公理系統, 对于“ $<$ ”和“ $>$ ”两个符号而言, 是完全对称的。因此, 对于每个关于小于关系的定理, 我們机械地得到相应的、关于大于关系的定理, 证明完全类似, 因而第二定理的证明全部可以省略。相应于定理 1 我們有:

定理 2. 没有一个数大于它自己: $x \not> x$ 。

至于同一关系 $=$, 如我們从邏輯中知道的, 是自反的, 定理 1 和 2 表明, 数之間的另外两种基本关系, $<$ 和 $>$, 是不自反的; 因之, 这些定理被称为(关系小于和大于的)不自反律。

§45. 基本关系的其它定理

下一步我們將证明以下定理:

定理 3. $x > y$, 当且仅当, $y < x$ 。

证明: 我們必須证明, 公式:

$$x > y \text{ 与 } y < x$$

等价, 也就是說, 证明: 第一公式蕴涵第二公式, 而且反之亦然(参看 §10)。

首先, 假定

$$(1) \quad y < x,$$

依据公理 1, 在以下三种情形中, 我們必定至少有一种:

$$(2) \quad x = y, \quad x < y \text{ 或 } x > y.$$

如果我們有 $x = y$, 由于同一理論的基本定律, 即萊布尼茲定律(参看 §17), 我們可以以“ y ”代換公式(1)中的变項“ x ”; 得到的公式

$$y < y$$

与定理 1 矛盾, 因此我們有:

$$(3) \quad x \neq y.$$

但是我們又有:

$$(4) \quad x \nless y,$$

因为, 根据公理 2, 公式

$$x < y \text{ 与 } y < x$$

不能同时成立。由于(2), (3)和(4), 我們发现, 必須应用第三种情形:

$$(5) \quad x > y.$$

这样, 我們已經证明, 公式(5)为公式(1)所蕴涵; 反过来, 相反方向的蕴涵式可以用类似的方法建立, 因此, 两个公式真正等价, q. e. d.^①

使用关系演算(参看 §28)的术语, 我們可以說, 按照定理 3, 关系 $<$ 和 $>$ 其中的一个是另一个的逆关系。

定理 4. 如果 $x \nless y$, 那么 $x < y$ 或者 $y < x$ 。

证明。因为

$$x \nless y,$$

据公理 1, 我們有:

$$x < y \text{ 或者 } x > y;$$

据定理 3, 以上公式中的第二式蕴涵:

$$y < x.$$

因此我們有:

$$x < y \text{ 或者 } y < x. \quad \text{q. e. d.}$$

与此类似, 我們能够证明,

定理 5. 如果 $x \nless y$, 那么 $x > y$ 或者 $y > x$ 。

据定理 4 和 5, 关系 $<$ 和 $>$ 是連通的; 因之, 这些定理被称为

① “q. e. d.” 是 “quod erat demonstrandum” 一語的通常簡写, 意思是“这就是所要证的”。

(关系小于和大于的) 连通性定律。公理 2—5 以及定理 4 和 5 一起表明, 数的集合 N 为关系 $<$ 和 $>$ 两者中的一个排成一定次序。

定理 6. 任何数 x 和 y 满足, 且只满足 $x=y$, $x<y$ 和 $x>y$ 三个公式中的一个。

证明。由公理 1 推出, 所說的三个公式至少有一个必須被滿足。为了证明公式:

$$x=y \text{ 与 } x>y$$

互相排斥。我們就像在定理 3 的证明中那样进行: 在以上两个公式的第二个公式中, 以“ y ”代“ x ”而得到一个公式与定理 1 相矛盾。同样地可以证明, 公式:

$$x=y \text{ 与 } x<y$$

互相排斥。最后, 两个公式:

$$x<y \text{ 与 } x>y$$

不能同时成立, 因为, 否則, 据定理 3 我們将有:

$$x<y \text{ 与 } y<x$$

与公理 2 矛盾。因此, 任何数 x 和 y 只滿足所說三个公式中的一个而不能更多, q. e. d.

我們將称定理 6 为强三分律, 或者简单地, 三分律; 按照这个定律, 在任何两个已給的数之間, 三种基本关系之一, 并且只有其中之一, 成立。用 §7 中所提出的意义下的成語“或者…或者”, 我們可以比較精确地将定理 6 表示为:

对于任何数 x 和 y , 我們有:

$$\text{或者 } x=y \text{ 或者 } x<y \text{ 或者 } x>y.$$

§46. 数之間的其它关系

基本关系以外, 还有三种其它的关系在算术中占据重要的地

位。其中之一是我們已經知道的邏輯上的相異关系 $\neq$ ；另外两种是現在将要討論的 $\leq$ 和 $\geq$ 关系。

符号“ $\leq$ ”的意义由以下定义說明：

定义 1. 我們說， $x \leq y$ ，当且仅当 $x = y$ 或者 $x < y$ 。

公式

$$x \leq y$$

讀作：“ x 是小于或等于 y ”或者“ x 至多等于 y ”。

虽然以上定义的内容看来是清楚的，經驗表明，在实际应用中，它有时是某些誤解的根源。一些人相信他們自己十分清楚地了解符号“ $\leq$ ”的意义，然而反对将它应用于确定的数。他們不仅否认这种公式，如：

$$1 \leq 0,$$

认为它显然錯誤——这的确是如此——，而且还认为这样一些公式，如像：

$$0 \leq 0 \text{ 或 } 0 \leq 1$$

是沒有意义的，甚或是假的；因为，他們主張，既然知道 $0 = 0$ 和 $0 < 1$ ，那么，說 $0 \leq 0$ 或 $0 \leq 1$ 就是沒有意义的。換句話說，在他們看来，不可能举出一对数适合公式：

$$x \leq y.$$

这种看法显然錯誤，正因为 $0 < 1$ 成立，所以語句

$$0 = 1 \text{ 或 } 0 < 1$$

真，因为两个語句的析取式必定是真的，假定其中的一个是真的（參看 §7）；但是依照定义 1 这个析取式等价于公式：

$$0 \leq 1.$$

由于完全类似的理由，公式：

$$0 \leq 0$$

也真。

这些误解的根源大概在于日常生活的某些习惯(*这一点在§7之末我们已经提请注意*)。在日常语言中, 只有当我们知道两个语句中有一个是真的, 但不知道那一个是真的时, 才习惯于断定两个语句的析取式。既然我们能够作出比较简单, 同时在逻辑上更强的断定, 即 $0 < 1$, 我们就不会说, $0 = 1$ 或 $0 < 1$, 虽然这无疑是真的。然而, 在数学的讨论中, 在最强的可能形式下陈述我们所知道的事情, 并不常常是有利的。例如, 有时我们对一个四角形仅仅断言它是一个平行四边形, 虽然我们不知道它是一个正方形, 所以这样做, 因为我们可能要引用一个关于任意的平行四边形的普遍定理。为了同样的理由, 可能有这样的情形, 已经知道一个数 x (例如, 数 0) 小于 1, 我们仍然可以只说 $x \leq 1$, 也就是,

$$x = 1 \text{ 或 } x < 1.$$

现在我们将陈述两个关于关系 $\leq$ 的定理。

定理 7. $x \leq y$, 当且仅当 $x \nabla y$.

证明。这个定理是定理 6, 即三分律的一个直接推论。事实上, 如果

$$(1) \quad x \leq y,$$

因而, 据定义 1,

$$(2) \quad x = y \text{ 或 } x < y,$$

那么公式:

$$x > y$$

不能成立。反之, 如果

$$(3) \quad x \nabla y,$$

我们必定有 (2), 因而, 再据定义 1, 公式 (1) 必定成立。于是公式 (1) 和 (3) 等价, q. e. d.

用 §28 的術語, 定理 7 說, 关系 $\leq$ 是关系 $>$ 的否定关系。

由于本身的结构, 定理 7 可以看作是符号“ $\leq$ ”的定义; 它与这里所采取的定义不同, 但与之等价。这个定理的陈述可能有助于驅散关于符号“ $\leq$ ”的用法的最后的疑惑; 因为, 沒有人会有任何犹豫来承认这样一些公式, 如:

$$0 \leq 0 \text{ 和 } 0 \leq 1$$

为真, 由于它們等价于公式:

$$0 \not< 0 \text{ 和 } 0 \not> 1.$$

如果我們願意, 我們完全可以避免使用符号“ $\leq$ ”, 因为总是可以用“ $\not>$ ”来代替它。

定理 8. $x < y$, 当且仅当 $x \leq y$ 且 $x \neq y$,

证明。如果

$$(1) \quad x < y,$$

那么, 据定义 1;

$$(2) \quad x \leq y,$$

而根据三分律, 公式:

$$x = y$$

不能成立。反之, 如果公式(2)成立, 那么据定义 1, 我們得到:

$$(3) \quad x < y \text{ 或 } x = y;$$

但如果同时我們有:

$$x \neq y,$$

那么我們必須承认, 析取式(3)的前一部分, 即, 公式(1)。因之, 两个方向的蘊涵式成立, q, e, d.

我們將略去关于关系 $\leq$ 的一些其它定理; 其中特別包括那些說这个关系是自反和傳遞的定理。这些定理的证明沒有一个有任何困难。

符号“ $\geq$ ”的定义完全与定义 1 类似; 从关于关系 $\leq$ 的定理, 我們机械地得到关于关系 $\geq$ 的相应的定理, 只須将符号“ $\leq$ ”, “ $<$ ”和“ $>$ ”全部代之以符号“ $\geq$ ”, “ $>$ ”和“ $<$ ”。

在具有形式

$$x=y$$

的公式中, “ x ”和“ y ”的地位可以为常項、变項或表示数的复合表达式所代替, 这种公式通常称为等式。具有形式

$$x < y \text{ 或 } x > y$$

的公式則称为不等式 (在狭义的意义上的); 在广义的意义上的不等式中, 除以上形式的公式外, 还有具形式

$$x \neq y, \quad x \leq y \text{ 或 } x \geq y$$

的公式。在这些公式中, 符号“ $=$ ”, “ $<$ ”等的左边和右边出現的表达式称为等式的或不等式的左方和右方。

练 习

1. 考虑人們中間的两种关系: 身材較小和身材較大。一个任意的人的集合必須滿足什么条件, 才使得这个集合与上面两种关系构成第一类公理的一个模型 (参看 §37)?

2. 令公式:

$$x \odot y$$

表示数 x 和 y 滿足下列条件之一: (i) 数 x 的绝对值小于数 y 的绝对值, 或 (ii) 如果 x 和 y 的绝对值相等, 那么 x 是負的而 y 是正的。此外, 令公式:

$$x \oslash y$$

与公式:

$$y \odot x$$

具相同的意义。

在算术的基础上证明：所有的数构成的集合以及剛才定义的关系 $\leq$ 和 $<$ 构成第一类公理的一个模型。

在算术和几何的範圍內，給出这些公理的解釋的其它例子。

3. 从定理 1 推演以下定理：

如果 $x < y$, 那么 $x \neq y$ 。

反之，不用任何其它的算术命題，从上述定理推演定理 1。这两个推論是否間接的，它們是否屬於 §44 定理 1 的証明的模式？

4. 推广 §44 定理 1 的証明，因而建立下列关系理論的一般定律(參看 §37 的注)：

在类 K 中每一个不对称的关系 R 在該类中也是不自反的。

5. 証明：如果取定理 1 作为一个新的公理，旧的公理 2 可以作为定理从这个公理和公理 4 推演出来。

作为这个論证的推广，証明以下关系理論的一般定律：

在类 K 中不自反和傳遞的关系 R 在該类中也是不对称的。

*6. 在 §44 的末尾我們曾經試圖解釋，何以定理 2 的証明可以省略。这些說明是第 (VI) 章的某些一般討論的应用。請詳細闡釋这一点，特別請指明和这一点有关的那些討論。

7. 从第一类公理推演下列定理：

(a) $x = y$, 当且仅当, $x < y$ 而且 $y < x$;

(b) 如果 $x < y$, 那么 $x < z$ 或 $z < y$ 。

8. 从公理 4 和定义 1 推演下列定理：

(a) 如果 $x < y$ 而且 $y \leq z$, 那么 $x < z$;

(b) 如果 $x \leq y$ 而且 $y < z$, 那么 $x < z$;

(c) 如果 $x \leq y$, $y < z$ 而且 $z \leq t$, 那么 $x < t$ 。

9. 証明关系 $\leq$ 和 $\geq$ 是自反的、傳遞的和連通的。这些关系是

对称的还是不对称的?

10. 证明: 在任何两个数之间, 以下六种关系恰恰有三种成立: $=, <, >, \neq, \leq$ 和 $\geq$ 。

11. 上题所列举的关系的任何一种的逆关系和否定关系, 还是在六种关系之中。请详细证明这一点。

*12. 第 10 题给出的六种关系中, 那两种之间存在着包含关系? 在这些种关系中, 任何一对的和、积及相对积是什么?

提示: 回忆 §28 中所解释的名词。不要忘了讨论两个相同的关系所组成的对子, 并且记住相对积与因子的次序有关(参看第 V 章练习 5)。36 对关系都应该加以考察。

(VIII) 一个数学理论的构造:

加法和减法的定律

§47. 关于加法的公理; 运算的一般

性质, 群和交换群的概念

现在我们转向第二类公理, 它由以下六个语句所组成:

公理 6. 对于任何数 y 和 z , 有一个数 x , 使得 $x = y + z$; 换言之: 如果 $y \in \mathbf{N}$, 而且 $z \in \mathbf{N}$, 那么 $y + z \in \mathbf{N}$ 。

公理 7. $x + y = y + x$ 。

公理 8. $x + (y + z) = (x + y) + z$ 。

公理 9. 对于任何数 x 和 y , 有一个数 z , 使得 $x = y + z$ 。

公理 10. 如果 $y < z$, 那么 $x + y < x + z$ 。

公理 11. 如果 $y > z$, 那么 $x + y > x + z$ 。

此刻让我们集中注意于这第二类的头四个语句, 即, 公理 6—9, 它们给加法运算规定一些简单的性质, 在逻辑和数学的一些部

分中,討論其它运算时,也常常会遇到这些性质。

一些特殊的名詞已經引用来指示这些性质。我們說运算 O 在类 K 中是可行的,或类 K 在运算 O 之下是閉的,如果施运算 O 于类 K 的任何二个元素,結果还是得到类 K 的一个元素;換句話說,如果对于类 K 的任何二个元素 y 与 z ,有一个类 K 的元素 x ,使得

$$x = yOz.$$

运算 O 称为在类 K 中是交換的,如果施这种运算于类 K 的元素,所得的結果与这些元素的次序无关,或者,換句話說,如果对于这一类的任何两个元素 x 与 y ,我們有:

$$xOy = yOx.$$

运算 O 在类 K 中是結合的,如果运算的結果与元素結合在一起的方式无关,或者,更精确地說,如果这一类的任何三个元素 x, y 与 z 满足条件:

$$xO(yOz) = (xOy)Oz.$$

运算 O 称为在类 K 中是右可反的或者左可反的,如果,对于类 K 的任何两个元素 x 与 y ,永远有这一类的一个元素 z ,使得

$$x = yOz \text{ 或 } x = zOy$$

分別成立。一个运算 O 既是右可反的,又是左可反的,简单地就称为在类 K 中可反的。立刻可以得出,一个右可反的或左可反的交換运算,必定是可反的。現在,我們說,一个类 K 对于运算 O 是一个群,如果这个运算在 K 中是可行的,結合的和可反的;如果,此外,运算 O 还是交換的,那么类 K 称为是对于运算 O 的一个交換群或阿貝尔群。群的概念以及交換群的概念构成一个特殊的数学学科的对象,这个学科就称为群論,群論在第 V 章已經提到。^①

① 群的概念为法国数学家伽罗华(E. Galois, 1811—1832)引进数学中,“阿貝尔群”这个詞是选来紀念挪威数学家阿貝尔(N. H. Abel, 1802—1829)的,他的研究对于

假定类 K 是全类 (或者是所讨论的理论的论域——参看 §23), 当我们使用“可行的”, “交换的”等语词时, 我们通常不提到这个类。

按照上面引入的术语, 公理 6—9 分别被称为可行性定律、交换律、结合律和加法运算的右可反性定律; 这些公理一起说明, 所有的数构成的集合是一个对于加法而言的交换群。

§48. 对于較多的被加数的交换律和结合律

公理 7, 即交换律, 和公理 8, 即结合律, 在这里所陈述的形式中, 分别地涉及两个和三个数, 但是有无穷多个涉及多于两个或三个数的其它的交换律和结合律, 例如, 公式:

$$x + (y + z) = y + (z + x)$$

是对于三个被加数的交换律的一个例子, 而公式:

$$x + [y + (z + u)] = [(x + y) + z] + u$$

是对于四个被加数的结合律的一个例子。此外, 还有一些具混合性质的定理, 一般地说, 这些定理断定: 被加数在次序和结合方面的任何一种变化, 对于加法的结果不产生影响, 我们陈述下面的定理作为一个例子:

定理 9. $x + (y + z) = (x + z) + y$ 。

证明。经过适当的代入, 由公理 7 和 8 我们得到:

$$(1) \quad z + y = y + z,$$

$$(2) \quad x + (z + y) = (x + z) + y.$$

按照莱布尼兹定律, 由于(1), 我们可以用“ $y + z$ ”代(2)中的“ $z + y$ ”; 结果是所要的公式:

$$x + (y + z) = (x + z) + y.$$

高等代数的发展有巨大的影响, 群概念对于数学的深远的重要性, 特别是自从另一位挪威数学家李(S. Lie, 1842—1899)的工作以来, 已经为大家所认识。

用同样的方法，我們能够从公理 7 和 8，可能还有公理 6，推演出关于任意多个被加数的所有的交換律和結合律。这些定理在代数表达式的变换中实际上是常常用到的。所謂表示一个数的表达式的变换，就像通常一样，指这样一种变换，通过这种变换，得到一个表示相同的数的表达式，这个表达式因之可以同原来的表达式用等号联結起来；最常受到这种变换的表达式是那些含有变項，因而是指示函項的表达式。在交換律和結合律的基础上，我們能够变换任何具有这种形式：

$$x + (y + z), x + [y + (z + u)], \dots$$

的表达式，也就是，为加号和括号所分开的数值常項和变項所組成的表达式；在任何这样的表达式中，我們可以任意地調換数值符号和括号（只須假定所得的表达式不会因括号的易位而变成沒有意义）。

§49. 加法的单調定律以及它們的逆定律

我們現在将要討論的公理 10 和 11 是所謂的对于关系小于和大于的加法的单調定律。更一般地，我們說，二項运算 O 在类 K 中对于二項关系 R 是单調的，如果，对于类 K 中任何元 x, y, z ，公式：

$$y R z$$

蕴涵

$$(x O y) R (x O z),$$

后一公式是說，施运算 O 于 x 和 y 所得的結果对于施运算 O 于 x 和 z 所得的結果有关系 R 。（在非交換的运算的情形下，严格地說，我們應該区分右单調和左单調，剛才定义的称为右单調。）

加法运算不仅对于关系小于和大于是单調的——这是公理 10 和 11 的一个推論——，并且对于 §46 中所討論的数之間的其它关

系也是单调的。这里我们将只对同一关系证明这一点:

定理 10. 如果 $y=z$, 那么 $x+y=x+z$ 。

证明。和 $x+y$ 的存在为公理 6 所保证, 它等于它自身 (根据 § 17 的定律 II):

$$x+y=x+y.$$

由于本定理的假设, 等式右边的变项“ y ”可以用变项“ z ”来代换, 于是我们得到所要的公式:

$$x+y=x+z.$$

定理 10 的逆定理也是真的:

定理 11. 如果 $x+y=x+z$, 那么 $y=z$ 。

在这里我们将指出这个定理的两个证明的大致步骤。建立在三分律和公理 6, 10 与 11 之上的第一个证明是比较简单的。不过, 为了我们后面的目的, 我们需要另一个证明, 这个证明比较起来相当复杂, 但是除公理 7—9 外, 不利用任何东西。

第一个证明。假定求证的定理是假的, 那么一定有数 x, y 和 z , 使得

$$(1) \quad x+y=x+z,$$

而且

$$(2) \quad y \neq z.$$

因为 $x+y$ 和 $x+z$ 是数 (按照公理 6), 根据三分律, 它们只能满足以下公式中的一个:

$$x+y=x+z, \quad x+y < x+z \quad \text{及} \quad x+y > x+z.$$

因为根据 (1), 第一式成立, 其它两式自动被消去。因此我们有:

$$(3) \quad x+y < x+z \quad \text{及} \quad x+y > x+z.$$

另一方面, 再一次应用三分律, 我们可以从不等式 (2) 推论出

$$y < z \quad \text{或} \quad y > z.$$

因此, 根据公理 10 和 11,

$$(4) \quad x+y < x+z \text{ 和 } x+y > x+z.$$

(4) 与 (3) 显然矛盾。假定于是被推翻, 而定理應該认为已經证明。

*第二个证明。应用公理 9, 但以“ y ”和“ u ”分別代換“ x ”和“ z ”, 我們推出有一个数 u 滿足公式:

$$y = y + u.$$

因为, 根据公理 7,

$$y + u = u + y,$$

由于同一关系的傳遞性(參看 §17 定律 IV) 我們有:

$$(1) \quad y = u + y.$$

現在再一次应用公理 9, 但以“ z ”和“ v ”分別代換“ x ”和“ z ”; 于是我們得到一个数 v 滿足等式:

$$(2) \quad z = y + v.$$

由于(1), 这里我們可以用表达式“ $u+y$ ”代換变項“ y ”:

$$z = (u + y) + v.$$

此外, 根据結合律, 即公理 8, 我們有:

$$u + (y + v) = (u + y) + v,$$

因此, 应用 §17 的定律 V, 我們得到:

$$z = u + (y + v).$$

由于(2), 这里我們可以用“ z ”代換“ $y+v$ ”(用萊布尼茲定律), 于是我們最后得到:

$$(3) \quad z = u + z.$$

第三次应用公理 9, 这一次以“ u ”, “ x ”和“ w ”分別代換“ x ”, “ y ”和“ z ”, 我們得到一个数 w , 对于 w ,

$$u = x + w$$

成立, 而因

$$x + w = w + x,$$

我們有:

$$(4) \quad u = w + x.$$

利用(4)我們从(1)得到以下公式:

$$y = (w + x) + y;$$

但因根据結合律, 我們有:

$$w + (x + y) = (w + x) + y,$$

这个公式变为:

$$(5) \quad y = w + (x + y).$$

由于本定理的假設, 我們可以用“ $x + z$ ”代換(5)中的“ $x + y$ ”, 这就导致:

$$(6) \quad y = w + (x + z).$$

再一次应用結合律, 我們有:

$$w + (x + z) = (w + x) + z,$$

因此(6)变为:

$$y = (w + x) + z.$$

由于(4), 这里我們可以用“ u ”代換“ $w + x$ ”。这样我們得到:

$$(7) \quad y = u + z.$$

但是从等式(7)和(3)推出

$$y = z. \quad \text{q. e. d.}^*$$

这里可以插入关于定理 11 的第一个证明的几点說明。像定理 1 的证明一样, 定理 11 的第一个证明构成間接推論的一个例子, 这个证明的輪廓可以描述如下。为了证明某一个語句, 譬如說“ p ”, 我們假設这个語句是假的, 也就是, 我們假定語句“非 p ”, 从这个假定推演出一个結論“ q ”; 也就是說, 我們证明蘊涵式:

如果非 p , 那么 q

(在所討論的情形中, 結論“ q ”是在证明中出現的条件(3)和(4)的合取)。不过, 另一方面, 我們能够证明(或者根据邏輯的一般定律, 就像在所討論的情形中那样, 或者根据数学学科中先已证明的某些定理, 这些定理的全部論证是在数学学科中作出的) 所得的結論是假的, 也就是“非 q ”成立; 因而我們被迫放棄原来的假定, 而承认語句“ p ”是真的。如果这个論证以完整的形式表示出来, 一个邏輯定律将在其中起本质的作用, 这个定律是我們从 §14 知道的逆反定律的一个变形, 这个定律就是:

从: 如果非 p , 那么 q , 推出: 如果非 q , 那么 p 。

这里所討論的证明稍微不同于定理 1 的证明。在定理 1 的证明中, 从定理假的假定, 我們推論出定理是真的, 也就是, 我們推演出一个与假定正相矛盾的結論; 但是, 在所討論的证明中, 我們从一个类似的假定推演出一个結論, 我們从其它理由知道这个結論是假的。不过这种差別不是本质的; 根据邏輯定律, 可以很容易地看出, 定理 1 的证明——像任何其它的間接推論一样——可以归到上面大致描述的模式中。

和定理 10 一样, 其它的單調定律, 即, 公理 10 和 11, 也有逆定律:

定理 12. 如果 $x + y < x + z$, 那么 $y < z$ 。

定理 13. 如果 $x + y > x + z$, 那么 $y > z$ 。

这些定理的证明, 可以沿着定理 1 的证明的綫索, 很容易地得到。

§50. 閉語句系統

有一个一般的邏輯定律, 熟悉这个定律可以大大簡化上面三个定理(11, 12 和 13) 的证明。这个定律有时称为閉系統定律或豪

伯定律^①, 在某些情形下, 当我们已经证明一些条件语句时, 这个定律容许我们从这些语句的形式推论出: 相应的逆语句也可以看作已经证明。

假定给了我们一些蕴涵式, 譬如三个蕴涵式, 对这三个蕴涵式我们将给予以下大概的形式:

如果 p_1 , 那么 q_1 ;

如果 p_2 , 那么 q_2 ;

如果 p_3 , 那么 q_3 。

这三个语句称为构成一个闭系统, 如果它们的前件穷尽了所有可能的情形, 也就是, 如果

p_1 或 p_2 或 p_3

是真的, 并且如果同时它们的后件互相排斥:

如果 q_1 , 那么非 q_2 ; 如果 q_1 , 那么非 q_3 ; 如果 q_2 , 那么非 q_3 。

闭系统定律断定, 如果构成一个闭系统的某些条件语句是真的, 那么相应的逆语句也是真的。

一个闭系统的最简单的例子是两个语句的系统, 这个系统包括一个蕴涵式:

如果 p , 那么 q ,

和它的反语句:

如果非 p , 那么非 q 。

为了证明这种情形下的两个逆语句, 甚至不必借助于闭系统定律; 应用逆反定律就够了。

定理 10 和公理 10 与 11 构成三个语句的一个闭系统, 这是三分律的一个推论; 因为在任何两个数之间我们恰好有 $=$, $<$ 和 $>$ 三

① 依德国数学家豪伯(K. F. Hauber, 1775—1851)的名字而命名。

种关系中的一种,我們知道这三个語句的假設,即,公式:

$$y=z, y<z, y>z,$$

穷尽所有可能的情形,而它們的結論,即,公式:

$$x+y=x+z, x+y<x+z, x+y>x+z$$

互相排斥。(三分律甚至蘊涵了更多的东西,即,头三个語句不仅穷尽所有可能的情形,而且也互相排斥,后三个公式不仅互相排斥而且也穷尽所有可能的情形,不过这与我們的目的无关。)仅仅由于三个命題构成一个閉系統,逆定理 11—13 必定成立为真。

在初等几何中可以找到許多閉系統的例子;例如,当我们考察两个圓的相对位置时,我們必須討論一个包括五个語句的閉系統。

最后,可以指出,任何人不知道閉系統定律,但是試图证明构成一个这种系統的命題的逆命題,可以机械地应用我們在定理 11 的第一个证明中所使用的同样的推理方式。

§51. 單調定律的推論

定理 10 和 11 可以合成一个語句:

$$y=z, \text{ 当且仅当, } x+y=x+z.$$

同样可以把公理 10 和 11 与定理 12 和 13 联結起来,这样得到的定理可以称为通过加法的等式和不等式的等价变换定律,这些定理的内容有时被描述如下:如果不改变等号或不等号,而以同一数加于一个等式或不等式的两边,所得的等式或不等式与原来的等价(自然,这种表示是不十分正确的,因为一个等式或不等式的两方不是数而是表达式,不可能加任何数于表达式上),这里提到的定理在解等式和不等式时起着重要的作用。

我們将从單調定理推演出另一个結論:

定理 14. 如果 $x+z<y+t$, 那么 $x<y$ 或者 $z<t$ 。

证明。假设这个定理的结论是假的; 换句话说, x 既不小于 y , z 也不小于 t 。根据三分律, 从此推出以下两个公式之一:

$$x=y \text{ 或 } x>y$$

以及以下两个公式之一:

$$z=t \text{ 或 } z>t$$

必定成立。这样, 我们必须讨论以下四种可能:

- (1) $x=y$ 而且 $z=t$,
- (2) $x=y$ 而且 $z>t$,
- (3) $x>y$ 而且 $z=t$,
- (4) $x>y$ 而且 $z>t$ 。

让我们从考虑第一种情形开始。如果(1)的两个等式是正确的, 根据定理 10, 从第一个等式我们得到:

$$z+x=z+y,$$

而因为根据公理 7,

$$x+z=z+x \text{ 而且 } z+y=y+z,$$

两次应用同一关系的传递律, 我们可以推论出:

$$(5) \quad x+z=y+z.$$

如果现在我们应用定理 10 于(1)的两个等式的第二个, 我们得到:

$$(6) \quad y+z=y+t,$$

这个公式与(5)一起可得:

$$(7) \quad x+z=y+t.$$

根据完全类似的推论——应用公理 4, 5, 10 和 11——, 剩下的三种情形(2), (3)和(4)的任何一种都导致不等式:

$$(8) \quad x+z>y+t.$$

因此在任何情形下, 公式(7)或(8)中的一个必定成立。但是因为 $x+z$ 和 $y+t$ 是数(公理 6), 根据三分律, 推出公式:

$$x+z < y+t$$

不能成立。

如是,由于假定結論是假的,我們得到一个与定理的假設直接矛盾的公式。因此这个假定要推翻,而我們知道結論确实是从假設推出来的。

剛才处理的論证算在間接证明之列;除开一点非本质的改变,它可以归到 §49 中大致叙述的模式中,这个模式与定理 11 的第一个证明相关。不过从形式上考虑,这个論证的方法稍微不同于定理 1 和 11 的证明所遵从的方法。这个推論具有下列的模式。为了证明一个具有蕴涵式形式的語句,譬如說,語句:

如果 p , 那么 q ,

我們假定这个語句的結論,即“ q ”是假的(而非全句是假的);从这个假定,也就是,从“非 q ”,推論出假設是假的,也就是“非 p ”成立。換句話說,不去证明求证的語句,而是給出相应的逆反語句:

如果非 q , 那么非 p

的一个证明,并且从此推論出原来語句的正确性。这种論证的根据要在語句演算的一个定律中寻找,这个定律是說,逆反語句的眞常常蕴涵原来語句的眞(参看 §14)。

这种形式的推論在所有的数学学科中十分普遍;它們构成間接证明最普通的类型。

§52. 减法的定义;反运算

我們的下一步工作是表明,减法的概念能够引进我們的討論中来。有了这个目的在心中,我們將首先证明下面的定理:

定理 15. 对于任何两个数 y 和 z , 恰恰有一个数 x , 使得 $y = z + x$ 。

证明。公理 9 保证至少有一个数 x 适合公式:

$$y = z + x.$$

我们必须证明这样的数不多于一个; 换句话说, 满足这个公式的任何两个数 u 和 v 相等。因此, 令

$$y = z + u \quad \text{而且} \quad y = z + v.$$

这个公式直接蕴涵(根据关系 = 的对称律和传递律):

$$z + u = z + v,$$

根据定理 11, 从这个公式我们得到,

$$u = v.$$

于是, 恰恰有一个数 x (参看 §20), 对于这个 x ,

$$y = z + x, \quad \text{q. e. d. -}$$

以上定理说到的唯一的数 x , 用以下符号: $y - z$ 表示; 像通常一样, 我们把它读作“数 x 和 y 的差”或者“从数 y 减去数 z 的结果”。差这一概念的精确定义如下:

定义 2. 我们说, $x = y - z$, 当且仅当, $y = z + x$ 。

一个运算 I 称为运算 O 在类 K 中的右反运算, 如果这两个运算 O 和 I 适合下列条件:

对于类 K 的任何元素 x, y 和 z , 我们有: $x = y I z$, 当且仅当, $y = z O x$ 。

类似概念: 运算 O 的左反运算, 可以依同样方法定义。如果运算 O 在类 K 中是交换的, 它的两个反运算——右的和左的——相合, 于是我们可以简单地說运算 O 的反运算。按照这种用语, 定义 2 表示, 减法是加法的右反运算(或者简单地說, 反运算)。

§53. 被定义者包含等号的定义

*定义 2 是数学中非常普通的一种定义的一个例证。这种定义

給表示单个事物的符号, 或者給表示在一些事物之上的一个运算 (換句話說, 具有一定数目的主目的函項) 的符号規定意义。在每一个这样的定义中, 被定义者具有等式的形式:

$$x = \dots;$$

在这等式的右边是要定义的符号本身, 还是由要定义的符号与一些变項“ y ”, “ z ”, $\dots$ 所构成的一个指示函項, 要看这个符号表示单个的事物还是在一些事物之上的一个运算而定。定义者可能是任何形式的一个語句函項, 这个函項包含有和被定义者之中相同的自由变項, 这个函項說, 事物 x ——可能还有事物 $y, z, \dots$ ——适合如此这般一个条件。定义 2 确立一个符号的意义, 这个符号表示在两个数之上的一个运算。为了給出这种类型的定义的另一个例子, 讓我們陈述“0”的定义, 这个符号是表示单个的数的。

我們說, $x=0$, 当且仅当, 对于任何数 y , 公式: $y+x=y$ 成立。

我們所討論的这种类型的定义和一种危險相連; 因为一个人在作出这种定义的时候, 如果不加以足够的注意, 他可能很容易遇到一种矛盾。一个具体的例子可以說明这一点。

讓我們暫時离开我們現在的探討, 而且假定在算术中我們已經有了乘号供我們使用, 我們要利用乘号定义除号。为此, 我們制定以下的定义, 这个定义是一絲不差地依照定义 2 仿造的:

我們說, $x=y:z$, 当且仅当, $y=z \cdot x$ 。

如果現在在这个定义中, 我們以“0”替換“ y ”和“ z ”, 而且首先以“1”然后以“2”替換“ x ”, 又如果我們注意我們有公式:

$$0=0 \cdot 1 \quad \text{与} \quad 0=0 \cdot 2,$$

我們立即得到:

$$1=0:0 \quad \text{与} \quad 2=0:0。$$

但是因为等于同一个东西的两个东西相等, 我們得到:

$$1=2,$$

这显然是无意义的。

不难举出这种现象的理由。在定义 2 和在这里考虑的商的定义中, 定义者具有语句函项的形式, 这个语句函项有三个自由变项“ x ”, “ y ”和“ z ”。对于每一个这样的语句函项, 有一个三项关系与它对应, 这个三项关系在数 x, y 和 z 之间成立, 当且仅当, 这些数满足那个语句函项(参看 §27); 而这正是定义的目的, 定义的目的就在引进一个符号表示这种关系。但如一个人予被定义者以形式:

$$x=y-z \text{ 或 } x=y:z,$$

那么, 他预先假定这个关系是函项的(因而是个运算, 或者一个函项, 参看 §34), 因此对于任何两个数 y 和 z , 至多有一个数 x 与它们有所说的关系。不过, 关系是函项的这一事实最初一点也不明显, 因之必须首先建立。在定义 2 的情形下, 这点我们做到了; 但是在商的定义的情形下, 我们没有能做到, 我们不能这么做, 仅仅因为在某种例外的情形下, 所说的关系不是函项的。因为, 如果

$$y=0 \text{ 而且 } z=0,$$

那么有无穷多个数 x , 对于这个 x

$$y=z \cdot x.$$

因此, 如果一个人想用以上形式表示商的定义, 而不引进矛盾, 他必须排除数 y 和 z 都是 0 的情形, ——例如, 在定义者之中插进一个附加的条件。

上面的讨论把我们引导到以下的结论。在定义 2 类型的每一个定义的前面应该有一个完全相应于定理 15 的定理, 就是说只有一个数 x 满足定义者的定理。(这里有个问题发生, 是恰恰有一个数适当, 还是至多有一个这样的数就够了。这个颇为困难的问题的讨论此处从略。)*

§54. 关于减法的定理

在定义 2 和加法的定律的基础上, 我們能够沒有困难地证明减法理論的一些基本定理, 如同可行性定律, 单調定律以及等式和不等式通过减法的等价变换定律。使所謂的代数和的变换成为可能的那些定理也在此列, 所謂的代数和, 就是, 为“+”号、“-”号和括号 (按照与括号的作用相同的特殊規則, 括号常被省略) 所分开的数值常項和变項所組成的表达式。下面的定理可以作为最后所說的那一类定理的一个例子:

定理 16. $x + (y - z) = (x + y) - z$ 。

证明。按照公理 9, 对于 y 和 z , 有一个数 u 与之对应, 使得

$$(1) \quad y = z + u;$$

按照定义 2, 上式蕴涵

$$(2) \quad u \doteq y - z.$$

从交換律我們有:

$$x + y = y + x.$$

由于(1), 右边的“ y ”可以用“ $z + u$ ”代換, 于是我們得到:

$$(3) \quad x + y = (z + u) + x.$$

另一方面, 从定理 9 推出:

$$(4) \quad z + (x + u) = (z + u) + x.$$

但因等于同数的二数相等, 我們能够从(3)和(4)推論:

$$(5) \quad x + y = z + (x + u).$$

現在, 因为 $x + u$ 和 $x + y$ 是数 (据公理 6), 我們可以用“ $x + u$ ”和“ $x + y$ ”代換定义 2 中的“ x ”和“ y ”。(5)表明定义者被滿足, 因此被定义者必定也成立:

$$x + u = (x + y) - z.$$

由于(2), 如果现在我们以“ $y-z$ ”代换上面等式中的“ u ”, 我们最后得到:

$$x + (y - z) = (x + y) - z, \quad \text{q. e. d.}$$

已经到达这个地方, 现在我们终止这一小部分算术的构造。

练 习

1. 考虑以下三个系统, 每一个由一个集合、两种关系和一种运算所组成:

(a) 所有的数构成的集合, 关系 $\leq$ 和 $\geq$, 加法运算;

(b) 所有的数构成的集合, 关系 $<$ 和 $>$, 乘法运算;

(c) 所有正数构成的集合, 关系 $<$ 和 $>$, 乘法运算。

判定: 这些系统中哪些是公理1—11的系统的模型(参看§37)。

2. 考虑一任意直线, 我们称它为数线; 令这条线上的点用字母“ X ”, “ Y ”, “ Z ”, ... 指示。在数线上我们选一固定的起点 O 以及与 O 点不同的单位点 U 。现在令 X 与 Y 为线上两个不同的点。我们考虑两个半线, 一个从 O 起始并且通过 U , 另一个从 X 起始并且通过 Y , 我们说点 X 在点 Y 的前面, 用符号表示, 为:

$$X \odot Y,$$

当且仅当, 这两个半线相同或者其中的一个——不论那一个——是另一个的部分, 在这一情形下, 我们也说点 Y 在点 X 的后面, 写作:

$$Y \odot X.$$

点 Z 称为点 X 和点 Y 的和, 如果它满足下列条件: (i) 线段 OX 与线段 YZ 相合; (ii) 如果 $O \odot X$, 那么 $Y \odot Z$, 但如 $O \odot X$, 那么 $Y \odot Z$ 。点 X 与点 Y 的和写作:

$$X \oplus Y.$$

用几何定理证明：数綫上所有的点构成的集合（比較簡單地說，即，数綫本身），关系 $\odot$ 和 $\oslash$ ，及运算 $\oplus$ 一起，构成我們所采取的公理系統的一个模型，因而这个系統在几何中有一个解釋。

3. 讓我們考虑四种运算 A , B , G 和 L ，它們——像加法一样——使一个数对应于任何两个数。我們永远把数 x 看作施运算 A 于数 x 和 y 的結果，把数 y 看作施运算 B 于数 x 和 y 的結果：

$$xAy = x, \quad xBy = y.$$

我們以符号“ xGy ”和“ xLy ”分別表示 x 和 y 两个数之中那不小于或不大于另一个数的数；如此，我們有：

$$xGy = x \quad \text{及} \quad xLy = y, \quad \text{如果} \quad x \geq y;$$

$$xGy = y \quad \text{及} \quad xLy = x, \quad \text{如果} \quad x \leq y.$$

§47 中所討論的性质有那一些属于这四种运算？对于这四种运算中的任何一种，所有的数构成的集合是否构成一个群，特别是，一个交换群？

4. 令 C 是所有点集类，也就是，所有几何图形的类。集合的加法和乘法（如在 §25 中定义的）在类 C 中是可行的，交换的，結合的和可反的嗎？因而类 C 对于这两种运算中的任何一种，是一个群，特别是，一个交换群嗎？

5. 证明：对于乘法而言，所有的数构成的集合不是一个交换群，但是下面每个集合对于乘法是一个交换群：

(a) 所有異于 0 的数构成的集合；

(b) 所有正数构成的集合；

(c) 由 1 与 -1 两数构成的集合。

6. 考虑由 0 和 1 两数组成的集合 S ，以及以下列公式定义在这个集合的元素之上的运算 $\oplus$ ：

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0,$$

$$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

判定集合 S 对于运算 $\oplus$ 是否构成一个交换群。

7. 考虑由 0, 1 和 2 三个数组成的集合 S , 在这个集合的元素上定义一个运算 $\oplus$, 使得对于这个运算, 集合 S 是一个交换群。

8. 证明: 没有由两个或三个不同的数所组成的一个集合, 对于加法是一个交换群, 是否有一个由单个的数所组成的集合, 对于加法构成一个交换群?

9. 从公理 6—8 推演下列定理:

$$(a) \quad x + (y + z) = (z + x) + y;$$

$$(b) \quad x + [y + (z + t)] = (t + y) + (x + z).$$

10. 如果仅仅根据公理 6—8 进行变换, 由下面每一个表达式可以得出多少表达式:

$$x + (y + z), \quad x + [y + (z + t)], \quad x + \{y + [z + (t + u)]\}?$$

11. 简明陈述运算 O 对于关系 R 的左单调的一般定义。

12. 根据我们所采取的公理以及从它们推演出来的定理证明: 加法对于关系 $\neq, \leq$ 和 $\geq$ 是一个单调运算。

13. 对于关系 $<$ 和 $>$, 乘法是否是一个单调运算:

(a) 在所有的数构成的集合中;

(b) 在所有的正数构成的集合中;

(c) 在所有的负数构成的集合中?

14. 第 3 题定义的一些运算中, 那些对于关系 $=, <, >, \neq, \leq$ 和 $\geq$ 是单调的?

15. 类的加法和乘法对于包含关系是单调的吗? 对于 §24 中所讨论的类之间的任何其它关系呢?

16. 从我们的公理推演下列定理:

如果 $x < y$ 而且 $z < t$, 那么 $x + z < y + t$.

在这个語句中依次以“ $>$ ”, “ $=$ ”, “ $\neq$ ”, “ $\leq$ ”和“ $\geq$ ”代換符号“ $<$ ”, 考察这样所得的語句是否是眞的。

17. 在算术和几何的範圍內給出閉語句系統的例子。

18. 从我們的公理推演下列定理:

(a) 如果 $x + x = y + y$, 那么 $x = y$;

(b) 如果 $x + x < y + y$, 那么 $x < y$;

(c) 如果 $x + x > y + y$, 那么 $x > y$ 。

提示: 首先证明这些語句的逆語句 (用第 16 題的結果), 然后证明它們构成一个閉系統。

*19. 如果一个定理能够只从公理 6—9 推演出来, 那么它能够推广到任意的交換群中去, 因为对于一个运算 O 构成一个交換群的每一类 K , 同这个运算一起构成公理 6—9 的一个模型 (参看 §37 和 §38)。这一点特別适用于定理 11 (由于这个定理的第二个证明), 因而我們有以下一般的群論定理:

对于运算 O 是一个交換群的每一类 K 滿足以下条件:

如果 $x \in K, y \in K, z \in K$ 而且 $x O y = x O z$, 那么 $y = z$ 。

給出这个定理的严格证明。

另一方面, 证明: 第 18 題的定理 (a) 不能推广到任意的交換群中去, 用举出类 K 和运算 O 的一个例子的方法加以证明, 类 K 和运算 O 具有以下性质: (i) 类 K 对于运算 O 是一个交換群, (ii) 类 K 中有两个不同的元素 x 和 y , 对于 x 和 y 有: $x O x = y O y$ (参看第 6 題)。因而, 定理 (a) 能不能只从公理 6—9 推演出来?

20. 变换定理 14 的证明, 使它符合 §49 中大致叙述的, 与定理 11 的第一个证明相联系的模式。

21. 可否說, 除法运算在所有的数构成的集合中是乘法运算的

反运算?

22. 第 3 题和第 4 题中提到的运算有没有反运算(在所有的数构成的集合中或者在所有的几何图形的类中)?

23. 什么运算是减法(在所有的数构成的集合中)的左反运算和右反运算?

*24. 在 §53 中符号“0”的定义是作为例子陈述出来的。为了使这个定义确实不致导致矛盾, 在这个定义的前面应该有如下的定理:

恰恰有一个数 x , 使得对于任何数 y , 我们有: $y+x=y$ 。

只用公理 6—9 证明这个定理。

25. 简明陈述这样一些语句, 它们分别断定减法是可行的; 交换的, 结合的, 右可反的和左可反的以及对于小于关系为右单调的和左单调的。这些语句中那一些是真的? 用我们的公理和 §52 中的定义 2 证明那些真的语句。

26. 从我们的公理和定义 2 推演下列定理,

$$(a) \quad x-(y+z)=(x-y)-z,$$

$$(b) \quad x-(y-z)=(x-y)+z,$$

$$(c) \quad x+y=x-[(x-y)-x].$$

*27. 用减法的可行性定律和上一题的定理(c), 证明下列定理:

数的集合 K 对于加法是一个交换群, 必须且只须, 集合 K 的任何两数的差仍然属于集合 K (也就是, 公式 $x \in K$ 和 $y \in K$ 永远蕴涵 $x-y \in K$)。

用这个定理找出一些数的集合的例子, 它们对于加法的交换群。

28. 用逻辑符号写出上二章所给的公理、定义和定理。

提示: 在用符号表示定理 15 以前, 先把它置于一个等价的形

式中, 其中的数值量詞由于 §20 所作的解釋已經被消去。

(IX) 关于所构造的理論的方法論的討論

§55. 在原来的公理系統中消去多余的公理

前面两章專門給出一个初等数学理論基础的概要。本章我們將討論理論建立于其上的公理系統和基本詞項, 这种討論具有方法論的性质。

我們將从一些具体的例子开始, 說明 §39 中关于公理和基本詞項的選擇的随意性, 多余的公理可以省略等等。

讓我們从以下問題开始, 是否公理 1—11 的系統——这个系統將簡称为系統 $\mathfrak{N}$ ——可能含有多余的公理, 也就是, 是否有公理能够从系統的其余公理推演出来。我們將立即看出, 回答并且肯定地回答這個問題是容易的。事实上, 我們有:

系統 $\mathfrak{N}$ 的公理中有三个, 即, 公理 4 或 5 中的一个, 公理 6, 以及公理 10 或 11 中的一个能够从其余的公理推演出来。

证明。我們首先证明

(I) 公理 4 或 5 中的一个能够借助于公理 1—3 从另一个推演出来。

我們注意, 定理 3 的证明仅仅根据——不論直接或間接——公理 1—3。另方面, 如果我們已經有定理 3, 我們可以按下面的推論方式从公理 4 推演出公理 5 (或者从公理 5 推演出公理 4):

如果

$$x > y \text{ 而且 } y > z,$$

那么, 据定理 3,

$$y < x \text{ 而且 } z < y;$$

因此, 应用定理 4 (但以“ z ”代換其中的“ x ”, 以“ x ”代換其中的“ z ”), 我們得到:

$$z < x,$$

又据定理 3, 上式蕴涵:

$$x > z,$$

而这就是公理 5 的結論。

同样可以证明:

(II) 公理 10 或 11 中的一个能够借助于公理 1—3 从另一个推演出来。

最后, 我們有:

(III) 公理 6 能够从公理 7—9 推演出来。

*后一断定的证明不十分簡單, 而和定理 11 的第二个证明类似。已給任意二数 x 和 y , 四次应用公理 9, 逐个地引进四个新的数 u, w, z 和 v , 令它們滿足下列公式:

$$(1) \quad y = y + u,$$

$$(2) \quad u = x + w,$$

$$(3) \quad y = w + z,$$

$$(4) \quad z = y + v.$$

据交換律, 从(1)我們有:

$$y = u + y;$$

將以上等式与(4)合在一起, 而像在定理 11 的证明中那样进行論证, 根据結合律, 我們得到:

$$(5) \quad z = u + z.$$

从(5)和(2)我們得到:

$$z = (x + w) + z,$$

由此,再据結合律,

$$z = x + (w + z),$$

由于(3),由上式可得:

$$(6) \quad z = x + y.$$

这样我們已經证明,对于任何两数 x 和 y ,存在一数 z ,对于 $z(6)$ 成立;而这正是公理 6 的内容。

可以补充一点:上面大致叙述的推論方式不仅适用于加法,按照 §37 和 §38 的一般論述,也适用于任何其它运算;在类 K 中交换的,結合的以及右可反的一个运算 O 在該类中也是可行的,因而类 K 对于运算 O 构成一个交换群(参看 §47)。*

現在我們已經知道系統 $\mathfrak{U}$ 至少包含三个多余的,因之可以省略的公理。因此,系統 $\mathfrak{U}$ 可以为以下八个公理組成的系統所代替:

公理 1⁽¹⁾. 对于任何数 x 和 y ,我們有: $x=y$ 或者 $x < y$ 或者 $x > y$ 。

公理 2⁽¹⁾. 如果 $x < y$, 那么 $y \nless x$ 。

公理 3⁽¹⁾. 如果 $x > y$, 那么 $y \nless x$ 。

公理 4⁽¹⁾. 如果 $x < y$ 而且 $y < z$, 那么 $x < z$ 。

公理 5⁽¹⁾. $x + y = y + x$ 。

公理 6⁽¹⁾. $x + (y + z) = (x + y) + z$ 。

公理 7⁽¹⁾. 对于任何数 x 和 y , 有一数 z , 使得 $x = y + z$ 。

公理 8⁽¹⁾. 如果 $y < z$, 那么 $x + y < x + z$ 。

我們將称这个公理系統为系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$, 現在我們有以下的結果:

系統 $\mathfrak{U}$ 与 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 等价。

与原来系統比較,新的簡化了的公理系統,从美学观点和教学观点两方面看,都有一些缺点。对于两个基本符号“ $<$ ”和“ $>$ ”,它不再是对称的,关系 $<$ 的一些性质不加证明地被接受下来,而关系

$\succ$ 的完全类似的性质不得不首先加以证明。在新系統中, 公理 6 也被省略, 公理 6 具有非常初等并且直观上明显的性质, 然而它之从系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 的公理推演出来是比較困难的。

§56. 化簡了的系統的公理的独立性

現在发生一个問題: 是否系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 中还有任何其它多余的公理。我們將证明事实上不是如此:

$\mathfrak{U}^{(1)}$ 是互相独立的公理的系統。

为了确立以上陈述的方法論的命題, 我們用凭借解釋的证明方法, 这种方法在 §37 的一个特例中已經使用过。

我們要证明系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 中沒有一个公理可以从这个系統的其余公理推演出来。讓我們考虑公理 2⁽¹⁾ 作为一个例子。假設我們在系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 的公理中, 把符号“ $<$ ”全部代換为“ $\leq$ ”, 而不以任何其它方式改变公理。作为这种变换的結果, 除公理 2⁽¹⁾ 以外, 沒有一个公理失去它的正确性; 事实上, 公理 3⁽¹⁾, 5⁽¹⁾, 6⁽¹⁾ 和 7⁽¹⁾, 由于它們不包含符号“ $<$ ”, 仍然不变, 而公理 1⁽¹⁾, 4⁽¹⁾ 和 8⁽¹⁾ 变为一些算术定理, 它們的证明, 根据系統 $\mathfrak{U}$ 或 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 与符号“ $\leq$ ”的定义 1 (参看 §46), 沒有任何困难。因此, 可以断言, 所有的数构成的集合 N , 关系 $\leq$ 和 $\succ$, 以及加法运算构成公理 1⁽¹⁾ 和 3⁽¹⁾—8⁽¹⁾ 的一个模型; 这七个公理的系統于是在算术中有一个新的解釋。另一方面, 可以立即看出, 由公理 2⁽¹⁾ 經過变换得到的語句是假的, 因为它的否定在算术中能够容易地证明; 公式:

$$x \leq y$$

并不常常排斥:

$$y \leq x,$$

因为有数 x 和 y 同时滿足两个不等式:

$$x \leq y \text{ 而且 } y \leq x$$

(自然, 如果而且仅仅如果, x 和 y 相等, 才是这种情形)。因此, 如果一个人相信算术的无矛盾性 (参看 §41), 他不得不承认这一事实: 从公理 2⁽¹⁾ 得到的語句不是这个学科的一个定理。从此推演出公理 2⁽¹⁾ 不能从系統 $\mathfrak{A}$ ⁽¹⁾ 的其余公理推演出来; 因为否則在任何解釋中, 如果其它公理成立, 这个公理也不会不正确 (参看 §37 中类似的討論)。

使用同样的推理方法, 但是应用其它适当的解釋, 关于其它每一个公理可以得到同样的結果。

*一般地, 用解釋证明的方法可以描述如下。問題是, 证明某个語句 A 不是一已給演繹理論的公理或者其它命題的系統 $\mathfrak{S}$ 的一个推論。为了证明这一点, 我們考虑一个任意的, 假定是无矛盾的演繹的理論 $\mathfrak{L}$ (在特殊的情形下, 可能就是系統 $\mathfrak{S}$ 的命題所屬的同一个理論)。然后我們試着在这个理論之內找到系統 $\mathfrak{S}$ 的一个解釋, 使得不是語句 A 本身, 而是它的否定成为理論 $\mathfrak{L}$ 的一个定理 (也可能是一个公理)。如果我們能够做到这一点, 我們可以应用 §38 中陈述的演繹法定律。如我們所知, 从这个定律推出, 如果語句 A 能够从系統 $\mathfrak{S}$ 的命題推演出来, 那么对于这个系統的任何解釋, 它将仍然是正确的。因此, 存在 $\mathfrak{S}$ 的一个解釋, 对于这个解釋 A 不正确, 这件事实是这一語句不能从系統 $\mathfrak{S}$ 推演出来的一个证明。更严格地說, 它是以下条件語句的一个证明:

如果理論 $\mathfrak{L}$ 是无矛盾的, 那么語句 A 不能从系統 $\mathfrak{S}$ 的命題推演出来。

何以必須包括理論 $\mathfrak{L}$ 是无矛盾的这一假定, 其理由是容易理解的。因为如果不然, 理論 $\mathfrak{L}$ 会把两个矛盾的語句包括在它的公理和定理之中, 而我們不能仅从 $\mathfrak{L}$ 包含 A 的否定这一事实, 推論出 $\mathfrak{L}$

不包含語句 A (或者无宁說 A 的解釋); 这样我們的論证就会不正确。

用上面的方法, 要得到一已給的公理系統的独立性的詳尽证明, 在所討論的系統中有多少公理, 上述的方法就得要应用多少次; 每个公理依次地当作語句 A, 而 $\mathfrak{C}$ 就由系統的其余公理所組成。*

§57. 多余的基本詞項的消去和公理系統的 繼續化簡; 一个有序交換群的概念

我們再一次回到公理系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$, 因为这个系統是独立的, 它不能用去掉多余的公理的办法进一步化簡。不过, 可以用不同的方法进一步化簡。因为事实表現出, 系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 的基本詞項不是互相独立的。事实上, “ $<$ ”和“ $>$ ”两个符号中的一个可以从基本詞項的目录中抹去, 然后用另一个来定义它。从定理 3 可以很容易地看出这一点来; 定理 8 由于它所具有的形式, 可以看作是符号“ $>$ ”借助于符号“ $<$ ”的一个定义, 而如果在这个定理中我們把等价式的两边互換, 我們可以把它当作符号“ $<$ ”借助于符号“ $>$ ”的一个定义(在两种情形中以“我們說”这个短語放在定理的前面是合宜的; 参看 §11)。从教学的观点看, 基本詞項的这种还原可能引起某些反对意見; 因为詞項“ $<$ ”和“ $>$ ”在意义上是同样清楚, 而且它們所指的关系具有完全类似的性质, 因而把其中的一个看作是直接可以理解的, 而另一个必須借助于第一个来定义, 这种做法会显得有些不自然。但是这些反对意見不大使人信服。

如果現在不顾任何教学上的考虑, 我們决定从基本詞項的目录中消去所說的符号中的一个, 使我們的公理具有一种形式, 其中沒有定义的詞項出現, 这一件工作就产生了。(順便提一提, 这是一个方法論的公設, 实际上它常常被置之不理; 特別是在几何中, 为

增加公理的簡易性和明显性,常用定义的詞項陈述公理)。这件工作沒有任何困难;我們仅仅把公理系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 中的每一个这样的公式:

$$x > y$$

代換以公式:

$$y < x,$$

据定理 3, 两公式是等价的。然后容易看出, 公理 1 可以为連通性定律, 即定理 4 所代替, 因为根据邏輯的 (即, 語句演算的) 一般定律两者可以互相推出; 現在公理 3 成为公理 2 的一个单纯代換, 因而可以略去。这样我們得到由以下七个公理組成的系統:

公理 1⁽²⁾. 如果 $x \neq y$, 那么 $x < y$ 或 $y < x$ 。

公理 2⁽²⁾. 如果 $x < y$, 那么 $y < x$ 。

公理 3⁽²⁾. 如果 $x < y$ 而且 $y < z$, 那么 $x < z$ 。

公理 4⁽²⁾. $x + y = y + x$ 。

公理 5⁽²⁾. $x + (y + z) = (x + y) + z$ 。

公理 6⁽²⁾. 对于任何数 x 和 y , 有一个数 z , 使得 $x = y + z$ 。

公理 7⁽²⁾. 如果 $y < z$, 那么 $x + y < x + z$ 。

这个公理系統称为系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$, 它与前面两个系統 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 的任何一个等价。不过, 这么說不严格; 因为不可能从系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的公理推演出系統 $\mathfrak{U}$ 或 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 的那些含有符号 “ $>$ ” 的語句, 除非系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 由于加进这个符号的定义而扩充。如我們所知, 我們可以予这个定义以以下形式:

定义 1⁽²⁾. 我們說, $x > y$, 当且仅当, $y < x$ 。

我們也知道, 这最后的語句如果不当作定义, 而是当作一个普通的定理 (在这种情形下, 略去开头的短語“我們說”), 那么它能够在系統 $\mathfrak{U}$ 或 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 的基础上证明。所討論的三个系統等价这一事实可以表示如下:

系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 和定义 1⁽²⁾ 一起等价于系統

$\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 中的任一个。

每当比較两个等价的然而至少包含有一部分不同的基本詞項的公理系統时, 需要用同样慎重的陈述方式。

公理系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 由于它的結構簡單而优越性显著, 头三个公理是关于小于关系的, 它們一起断定, 集合 N 为这个关系排成一定次序; 其次的三个公理是关于加法的, 它們断定, 集合 N 对于加法是一个交換群; 末一个公理——單調定律——最后陈述小于关系和加法运算之間的一种相关性。一类 K 称为是对于关系 R 和运算 O 的一个有序交換群, 如果 (i) 类 K 为关系 R 排成一定次序, (ii) 类 K 是对于运算 O 的一个交換群, 而且 (iii) 运算 O 在类 K 中对于关系 R 是單調的。按照这个用語我們可以說, 数的集合为公理系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 描述为: 对于小于关系和加法运算的一个有序交換群。

关于系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 可以确立以下事实:

系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 是一个独立的公理系統, 而且所有它的基本詞項, 即“ N ”, “ $<$ ”和“ $+$ ”是互相独立的。

我們略去这个命題的证明。我們只說, 为了确立基本詞項的互相独立性, 人們必須再次应用凭借解釋的证明的方法, 不过这个方法在这个情形下要采取更为复杂的形式; 篇幅不够, 使我們不能深入討論为了这个目的这个方法所需要作的改变。

§58. 公理系統的进一步化簡; 基本詞項系統的可能变换

系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 显然可以为任何一个与它等价的語句系統所代替。这里我們要給出这种系統的一个特別簡單的例子, 这个系統可以称为系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 。它含有的基本詞項和 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的相同, 它只包含五个語句:

公理 1⁽³⁾. 如果 $x \neq y$, 那么 $x < y$ 或 $y < x$.

公理 2⁽³⁾. 如果 $x < y$, 那么 $y \nless x$.

公理 3⁽³⁾. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

公理 4⁽³⁾. 对于任何数 x 和 y 有一数 z 使得 $x = y + z$.

公理 5⁽³⁾. 如果 $x + z < y + t$, 那么 $x < y$ 或 $z < t$.

我們將证明

系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 与 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 等价.

证明. 首先, 我們注意, 系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的所有公理或者包含在系統 $\mathfrak{U}$ 中(例如, 公理 2⁽³⁾ 与 公理 2 相合, 公理 4⁽³⁾ 与 公理 9 相合), 或者在系統 $\mathfrak{U}$ 的基础上被证明(公理 1⁽³⁾, 3⁽³⁾ 和 5⁽³⁾ 分別与 定理 4, 9 和 14 相合). 但是因为公理系統 $\mathfrak{U}$ 与 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 等价, 如我們从 §57 知道的(定义 1⁽²⁾ 毕竟总是可以加到系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 上去), 我們可以推断, 系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的所有語句可以在系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的基础上证明. 剩下的就是从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的那些不在 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 中出現的語句, 即公理 3⁽²⁾, 4⁽²⁾, 5⁽²⁾ 和 7⁽²⁾, 这件工作不是那么簡單.

* 我們从公理 4⁽²⁾ 和 5⁽²⁾ 开始.

(I) 公理 4⁽²⁾ 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来.

因为, 給定二数 x 和 y , 我們可以应用公理 4⁽³⁾ (但以“ x ”代其中的“ y ”, 以“ y ”代其中的“ x ”), 因而, 有一个数 z , 使得

$$(1) \quad y = x + z.$$

如果現在在公理 3⁽³⁾ 中, 我們以“ x ”代“ y ”, 則得:

$$(2) \quad x + (x + z) = (x + z) + x.$$

由于(1), 以上等式两边的“ $x + z$ ”可以用“ y ”替換, 于是我們得到公理 4⁽²⁾:

$$x + y = y + x.$$

(II) 公理 5⁽²⁾ 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来.

事实上, 据公理 3⁽³⁾ 我們有 (如果以 “y” 代換 “z”, 以 “z” 代換 “y”):

$$x + (z + y) = (x + y) + z;$$

据 (I) 我們已經推演出交換律, 由于交換律我們可以把这里的 “z + y” 代以 “y + z”, 于是我們得到公理 5⁽²⁾:

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

为便于推演出公理 3⁽²⁾ 与 7⁽²⁾, 我們將首先表明, 前章陈述的一些公理和定理如何可以在系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的基础上证明。

(III) 定理 1 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来。

我們只須注意, §44 所給的定理 1 的证明仅仅是根据公理 2, 而公理 2 又与系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理 2⁽³⁾ 相合。

(IV) 公理 6 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来。

事实上, 在 §55 中我們已經知道公理 6 能够从公理 7, 8 和 9 演繹出来, 公理 7 和 8 与公理 4⁽²⁾ 和 5⁽²⁾ 相同, 因而据 (I) 和 (II), 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来。另一方面, 公理 9 在系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 中作为公理 4⁽³⁾ 出現, 所以, 公理 6 是 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理的一个推論。

(V) 定理 11 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来。

在定理 11 的第二个证明中, 如 §49 中所給的, 只用到公理 7, 8 和 9, 因此定理 11 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来, 其理由与公理 6 相同; 見 (IV)。

(VI) 定理 12 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来。

因为, 假定定理 12 的假設成立:

$$x + y < x + z;$$

我們应用公理 5⁽³⁾, 但以 “y”, “x” 和 “z” 分別替換公理 5⁽³⁾ 中的 “z”, “y” 和 “x”. 从此得出以下公式:

$$x < x \text{ 或 } y < z$$

中的一个必須成立；第一个可能必須被否定，因为它与定理 1 矛盾，而我們已經证明定理 1 可以从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 推演出来，——参看 (III)。因此，定理 12 的結論：

$$y < z$$

必須成立。

(VII) 公理 3⁽²⁾ 能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来。

讓我們假定公理 3⁽²⁾ 的假設，即公式：

$$(1) \quad x < y$$

与

$$(2) \quad y < z。$$

如果現在我們有：

$$y + x = y + z,$$

那么，据由 (V) 已經推演出来的定理 11，推出

$$x = z。$$

于是在 (1) 中“ x ”可代換以“ z ”，而这将导致：

$$z < y。$$

由于公理 2⁽³⁾ 这个不等式与 (2) 矛盾，因而必須被否定。于是我們有：

$$(3) \quad y + x \neq y + z。$$

因为据公理 6， $y + x$ 和 $y + z$ 都是数，我們可以根据公理 1⁽³⁾ 从 (3) 推論出以下两种情形：

$$(4) \quad y + x < y + z \text{ 或 } y + z < y + x$$

中的一个必須成立。考虑 (4) 的第二个公式，据已經推演出来的公理 4⁽²⁾，我們可以把其中的“ $y + x$ ”代換以“ $x + y$ ”；这样我們得到：

$$y + z < x + y。$$

应用公理 5⁽³⁾ 于上式，但以“ y ”代換公理 5⁽³⁾ 中的“ x ”和“ t ”，以“ x ”

代換其中的“ y ”。用这种方法我們得到以下的推論：

$$y < x \text{ 或 } z < y.$$

但是这一个推論必須被否定，因为由于公理 2⁽³⁾，它与(1)和(2)矛盾，而(1)和(2)构成公理 3⁽²⁾的假設。因此我們回到(4)的第一个公式并应用由(VI)推演出来的定理 12，但以“ x ”代換定理 12 中的“ y ”，以“ y ”代換其中的“ x ”；于是我們得到：

$$x < z$$

而这就是公理 3⁽²⁾的結論。

(VIII) 公理 7⁽²⁾能够从系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的公理推演出来。

这里的方法与剛才所用的方法相似，但是更为簡單。我們假定公理 7⁽²⁾的假設：

$$(1) \quad y < z.$$

如果現在我們有：

$$x + y = x + z,$$

那么据定理 11 推出

$$y = z;$$

因此在(1)中我們可以用“ z ”代“ y ”，而得到一个与定理 1 相矛盾的公式，据(III)定理 1 已經推演出来。所以我們必須有：

$$x + y \neq x + z,$$

据公理 1⁽³⁾，从此推出

$$(2) \quad x + y < x + z \text{ 或 } x + z < x + y.$$

由于定理 12，以上不等式中的第二个导致：

$$z < y,$$

但是根据公理 2⁽³⁾，上式与我們的假設(1)矛盾。因之我們必須承认不等式(2)中的第一个：

$$x + y < x + z,$$

而这就是公理 7⁽²⁾的結論。*

用这种方法,我們知道系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的所有語句是系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的推論,反之亦然;因此两个公理系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 和 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 确实证明是等价的。

無疑的,系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 較系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 簡單,因而比系統 $\mathfrak{U}$ 或 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 更簡單。比較系統 $\mathfrak{U}$ 与 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 是特別有趣的事;作为連續还原的結果,公理的数目减少了一大半。另一方面,也應該注意,系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 的某些語句(即,公理 3⁽³⁾ 和 5⁽³⁾) 比其它系統的公理較不自然和复杂,某些,甚至是非常初等的,定理的证明在这里較之在其它系統的基础上也是更为复杂和困难。

如同公理系統一样,基本詞項的系統也可以为任何等价的系統所代替。这一点特別适用于“N”,“<”与“+”三个詞項的系統,这三个詞項在剛剛討論过的那些公理中作为仅有的基本詞項而出現。如果在这个系統中我們以符号“ $\leq$ ”代替符号“<”,我們得到一个等价的系統;因为“ $\leq$ ”是用“<”定义的,而定理 8 告訴我們,后者又如何可以用前者来定义。可是基本詞項系統的这样一种变换并无好处;特別是,对于公理的化簡并无帮助,对于那些对符号“<”較之对符号“ $\leq$ ”可能更为熟悉的讀者,这种变换甚至可能显得頗不自然。在原来的系統中将符号“+”代換以“ $\rightarrow$ ”可以得到另一个等价的系統;但是这种变换也并不方便。最后,我們要指出,有其它的基本詞項系統与所討論的系統等价,却只包括两个詞項。

§59. 所构造理論的无矛盾性問題

現在我們簡單地討論一下,关于上面所考虑的一小部分算术的几个其它的方法論問題;这就是无矛盾性問題和完全性問題(參看 §41)。因为不論我們的說明涉及的是几个等价的公理系統中的那一个,都沒有什么关系,我們現在將总是討論系統 $\mathfrak{U}$ 。

如果我們相信全部算術的无矛盾性(前面曾經作此假定,在以下的討論中還要假定這一點),那麼我們必定更要承認以下事實

建立在系統 $\mathcal{A}$ 之上的數學理論是无矛盾的。

但是要給出全部數學的无矛盾性的嚴格證明,這一試圖遇到了根本的困難(參看 §41),而對於系統 $\mathcal{A}$ 的這種證明不僅是可能的甚至還比較簡單。理由之一就是,能夠從公理系統 $\mathcal{A}$ 推演出來的定理的變化的確是非常小的;例如,在它的基礎上不可能回答這樣非常初等的問題,即是否有任何數存在的問題。這種情形使得所討論的一部分算術不包含一對矛盾定理,這一事實的證明大為容易。不過用這裡我們使用的工具,大致敘述无矛盾性的證明,甚或嘗試着使讀者知道它的基本思想,都將是沒有希望的事;這需要比較深的邏輯知識,而一個重要的初步工作是把所討論的一部分算術改造成為一個形式化的演繹理論(參看 §40)。還可以補充一點,如果用一個說至少有两个不同的數存在這樣的語句擴充系統 $\mathcal{A}$,那麼試圖證明擴充了的公理系統的无矛盾性將會遇到困難,困難的程度就像在全部算術系統的情形下遇到的一樣。

§60. 所構造理論的完全性證明

与无矛盾性問題相比較,系統 $\mathcal{A}$ 的完全性問題處理起來要容易得多。

有許多完全用邏輯詞項和系統 $\mathcal{A}$ 的基本詞項陳述的問題,它們無論如何都不容許在這個系統的基礎上判定。上一節中已經提到一個這樣的問題。以下語句給出另一個例子,這個語句說,對於任何數 x ,有一個數 y ,使得

$$x = y + y.$$

只在系統 $\mathcal{A}$ 的公理的基礎上,既不可能證明也不可能否認這個語

句。这一点可以从下面的討論看出。我們曾經用符号“ N ”表示所有实数构成的集合；也就是說，集合 N 包括整数和分数，有理数和无理数。但是立刻可以看出，如果我們用符号“ N ”表示所有整数（包括 0 在內的正和負的整数）构成的集合，或者所有有理数构成的集合，沒有一个公理，因而沒有一个从它們推出来的定理，会失去它們的正确性；也就是說，如果“数”这个字指“整数”或者指“有理数”，所有这些命题会仍然正确。上面提到的語句，也就是，断定对于任何給定的数有另外一个数是它的一半这样一个語句，在第一种情形下会是假的；在第二种情形下会是真的。因此，如果我們在系統 $\mathcal{U}$ 的基础上得以证明这个語句，我們会在整数算术的範圍內得到一个矛盾；另一方面，如果我們能够否定它，那么我們將发现自己在有理数算术的範圍內陷入矛盾。

这里大致叙述的論证属于用解釋证明的范畴（参看 §37 与 §56）；为了說明这一点，讓我們將論证的陈述略加改变。令“ I ”指所有整数的集合，“ R ”指所有有理数的集合。現在我們將在算术範圍內給出系統 $\mathcal{U}$ 的两种解釋，在两种解釋中符号“ $<$ ”，“ $>$ ”和“ $+$ ”不变，而在每个公理中明显地或者隐含地出現的符号“ N ”在第一种解釋中为“ I ”所代替，在第二种解釋中为“ R ”所代替（这里我們不考虑 §43 中关于符号“ N ”可能消去所作的說明，因为这会使我們的推理略为复杂）。系統 $\mathcal{U}$ 的所有公理在两种解釋中保持它們的正确性；不过，語句：

对于每一个数 x ，有一个数 y ，使得

$$x = y + y,$$

只在第二种解釋的情形下被滿足，而在第一种解釋的情形下它的否定成立：

并非对于每一个数 x ，有一个数 y ，使得

$$x = y + y.$$

在算术无矛盾的假定下, 我們从第一种解釋推論出, 所討論的語句不能在系統 $\mathfrak{U}$ 的基础上证明, 而从第二种解釋推論出, 它也不能被否定。

这样我們已經证明存在两个互相矛盾的語句, 它們只用邏輯詞項和我們所考虑的数学理論的基本詞項来陈述, 它們具有这种性质, 即它們两个都不能从这个理論的公理推演出来。于是我們有:

建立在系統 $\mathfrak{U}$ 之上的数学理論是不完全的。

练习

1. 讓我們約定公式:

$$x \otimes y$$

作如下的解釋:

$$x + 1 < y,$$

現在請將§57的系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的公理中的符号“ $<$ ”全部替以“ $\otimes$ ”, 試判定那一个公理保持它的正确性那一个公理不保持, 因而推論出公理 1⁽²⁾ 不能够从其余的公理推演出来。这里所用的推論方法的名字是什么?

2. 依照 §56 大致叙述的公理 2⁽¹⁾ 的独立性证明的綫索, 证明: 公理 2⁽²⁾ 不能从系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的其余公理推演出来。

3. 令符号“ $\dot{N}$ ”指 0, 1 和 2 三个数组成的集合。在这个集合的元素之間我們定义一个关系 $\succeq$, 規定它只在以下三种情形下成立:

$$0 \succeq 1, 1 \succeq 2, 2 \succeq 0.$$

此外, 我們用以下公式定义一个在集合 $\dot{N}$ 的元素之上的运算 $\dot{+}$:

$$0 \dot{+} 0 = 1 \dot{+} 2 = 2 \dot{+} 1 = 0,$$

$$0 \dot{+} 1 = 1 \dot{+} 0 = 2 \dot{+} 2 = 1,$$

$$0 \dot{+} 2 = 1 \dot{+} 1 = 2 \dot{+} 0 = 2.$$

現在在系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的公理中, 以“ $\dot{N}$ ”, “ $\dot{+}$ ”和“ $\dot{+}$ ”分別替換这个系統的基本詞項 (并以表达式 “0, 1 和 2 三个数中的一个” 替換“数”这一个詞); 证明: 經過这种变换, 公理 3⁽²⁾ 不能从其余的公理推演出来。

4. 为了用借解釋证明的方法表明: 公理 4⁽²⁾ 不能从系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的其余公理推演出来, 只要在所有的公理中把加号換为第 VIII 章第 3 題中提到的四种运算中的某一个的符号。必須用到的是那一种运算?

5. 考虑适合以下公式:

$$x \oplus y = 2 \cdot (x + y)$$

的运算 $\oplus$ 。利用这个运算证明: 公理 5⁽²⁾ 不能从系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的其它公理演繹出来。

6. 构造这样一个数的集合, 它与关系 $<$ 和运算 $+$ 一起, 虽不滿足公理 6⁽²⁾, 但是构成系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的其余公理的一个模型。因此, 关于公理 6⁽²⁾ 的可推演性可以得出什么結論?

7. 为了证明公理 7⁽²⁾ 不是系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的其它公理的一个推論, 我們可以如此进行: 在所有的公理中, 把这个系統的两个基本詞項替換以第 3 題中引进的相应的符号, 而让第三个基本詞項不变。試判定那一个詞項應該保留不变。

8. 第 1—7 題中所得的結果表明, 沒有一个系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的公理能够从这个系統其余公理推演出来。对 §55 的公理系統 $\mathfrak{U}^{(1)}$ 和 §58 的 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 作出类似的独立性证明 (部分使用上題中所用的解釋)。

9. 在公理系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的基础上, 证明: 对于加法运算是一个交換群的任何数的集合同时是对于小于关系和加法运算的一个有序交

換群。給出这种数的集合的一些例子。

10. 在第 VIII 章的第 5 題中給出了几个数的集合，它們对于乘法构成交換群。这些集合中的那一些对于小于关系和乘法运算是有序交換群，那些不是？

11. 用第 10 題中得到的結果，作出公理 7⁽²⁾ 对于系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的其余公理的独立性的新证明(参看练习 7)。

*12. 在公理系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 的基础上证明下列定理：

如果至少有两个不同的数，那么对于任何数 x ，有一个数 y ，使得 $x < y$ 。

作为这个結果的推广，证明下列一般的群論定理：

如果类 K 对于关系 R 和运算 O 是一个有序交換群，又如果 K 至少有两个元素，那么，对于 K 的任何元素 x ，有 K 的一个元素 y ，使得 $x R y$ 。

利用这个定理证明：沒有一个是有序交換群的类能够剛好由两个，或者三个，等等元素所組成。它能够剛好包含一个元素嗎？(参看第 VIII 章的第 8 題。)

*13. 证明公理 1⁽²⁾—3⁽²⁾ 的系統(参看 §57)等价于由公理 1⁽¹⁾ 和以下語句所組成的系統：

如果 $x < y$, $y < z$, $z < t$, $t < u$ 而且 $u < v$ ，那么 $v < x$ 。

确立下列关系理論的一般定律作为以上結果的推广：

类 K 为关系 R 排成一个次序，必須且只須， R 在 K 中是連通的，而且滿足下列条件：

如果 x, y, z, t, u 和 v 是 K 的任何元素，而且如果 $x R y$, $y R z$, $z R t$, $t R u$ 并且 $u R v$ ，那么不是 $v R x$ 。

*14. 用 §48, §55 和 §58 的討論，证明以下三个語句系統等价：

(a) §47 的公理 6—9 的系統。

(b) §57 的公理 $4^{(2)}$ — $6^{(2)}$ 的系統。

(c) §58 的公理 $3^{(3)}$ 和 $4^{(3)}$ 的系統。

推广这个結果, 簡明陈述以下表达式的新定义:

类 K 对于运算 O 是一个交換群,

而且使它和 §47 所給的定义等价, 但是較为簡單。

*15. 考虑由以下五个公理組成的系統 $\mathfrak{U}^{(4)}$:

公理 $1^{(4)}$. 如果 $x \neq y$, 那么 $x < y$ 或 $y < x$ 。

公理 $2^{(4)}$. 如果 $x < y, y < z, z < t, t < u$, 而且 $u < v$, 那么 $v < x$ 。

公理 $3^{(4)}$. $x + (y + z) = (x + z) + y$ 。

公理 $4^{(4)}$. 对于任何数 x 和 y , 有一个数 z , 使得 $x = y + z$ 。

公理 $5^{(4)}$. 如果 $y < z$, 那么 $x + y < x + z$ 。

用第 13 題和第 14 題的結果证明: 系統 $\mathfrak{U}^{(4)}$ 等价于系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 和 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 中的每一个。

16. 在 §58 中曾經断定“ N ”, “ $<$ ”和“ $+$ ”三个基本詞項的系統等价于詞項“ N ”, “ $\leq$ ”和“ $+$ ”的系統; 对于这个断定实在應該补充一点: 这些系統对于某一个語句系統, 例如, 对于 §58 的系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ 和 §46 的定义 1, 是等价的。討論: 何以这一点补充是不可少的。一般而論, 当要建立两个詞項的系統等价时 (在 §39 的意义上), 何以必須提到一个特殊的語句系統?

*17. 考虑由以下七个語句組成的系統 $\mathfrak{U}^{(5)}$:

公理 $1^{(5)}$. 对于任何数 x 和 y , 我們有: $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 。

公理 $2^{(5)}$. 如果 $x \leq y$ 而且 $y \leq x$, 那么 $x = y$ 。

公理 $3^{(5)}$. 如果 $x \leq y$ 而且 $y \leq z$, 那么 $x \leq z$ 。

公理 $4^{(5)}$. $x + y = y + x$ 。

公理 $5^{(5)}$. $x + (y + z) = (x + y) + z$ 。

公理 $6^{(5)}$. 对于任何数 x 和 y , 有一个数 z , 使得 $x = y + z$ 。

公理 7⁽⁵⁾. 如果 $y \leq z$, 那么 $x + y \leq x + z$.

证明: 如果将 §46 的定义 1 加到公理系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ (参見 §57) 中去, 将 §46 的定理 8 作为符号 “ $<$ ” 的定义 加到公理系統 $\mathfrak{U}^{(5)}$ 中去, 那么两个系統成为等价的語句系統. 为什么我們不可以簡單地說, 系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 和 $\mathfrak{U}^{(5)}$ 等价?

18. 依照 §60 的論证的綫索证明: 在系統 $\mathfrak{U}$ 的基础上, 以下語句既不能证明也不能否定:

如果 $x < z$, 那么有一个数 y , 对于这个 y , $x < y$ 而且 $y < z$.

*19. 在系統 $\mathfrak{U}$ 的基础上证明: 下列語句既不能证明也不能否定:

对于任何数 x , 有一个数 y , 使得 $x < y$.

*20. 在本章中, 为了建立一个公理系統的独立性或不完全性, 我們曾經使用凭借解釋以证明的方法. 在討論公理系統的无矛盾性时也使用同样的方法. 事实上, 我們有以下方法論的定律供我們使用, 这个定律是演繹法定律的一个推論:

如果演繹的理論 $\mathfrak{S}$ 在演繹的理論 $\mathfrak{T}$ 中有一个解釋, 并且理論 $\mathfrak{T}$ 是无矛盾的, 那么理論 $\mathfrak{S}$ 也是无矛盾的.

证明这个命題是正确的. 在 §38 中关于算术和几何的可能解釋曾經作了一些說明; 应用剛才所給的定律, 从这些說明引申出关于算术和几何的无矛盾性, 以及它們与邏輯的无矛盾性的关系的一些結論.

(X) 所构造的理論的扩充。实数算术的基础

§61. 实数算术的第一个公理系統

公理系統 $\mathfrak{A}$ 作为全部实数算术的基础是不够的, 因为——如我們在 §60 中見到的——这个学科的許多定理不能从这个系統的公理演繹出来, 而且也为了另一个重要性不下于前面所說的, 恰好又十分类似的理由: 能够找到一些属于算术領域的概念, 它們不能用系統 $\mathfrak{A}$ 中出現的基本詞項来定义。例如, 系統 $\mathfrak{A}$ 不能使我們定义乘法符号或除法符号, 甚至像“1”, “2”等等这样一些符号。

为了得到构造全部实数算术的一个充分基础, 我們的公理和基本詞項的系統必須如何改变和补充, 这一問題立即提出来了。这个問題可以用种种方法解决。这里将大致叙述两种不同的解决方法。^①

在第一种方法的情形下, 我們选择系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ (参見 §58) 作为我們的起点; 在这个系統中出現的基本詞項以外, 我們加上“1”这一个字, 像通常一样, 这个字将为符号“1”所代替, 系統的公理則为四个新的語句所补充。用这种方法得到一个新的系統 $\mathfrak{A}'$, 它包括四个基本詞項“N”, “<”, “+”和“1”而且由九个公理所組成, 这九个公理我們將明显地列举如下:

公理 1'. 如果 $x \neq y$, 那么 $x < y$ 或 $y < x$ 。

① 全部实数算术的第一个公理系統是希尔伯特在 1900 年发表的; 这个系統和我們下面将要熟悉的系統 $\mathfrak{A}''$ 有关。在 1900 年以前, 人們已經知道一些較不丰富的算术部分的公理系統; 这样的第一个系統是关于自然数算术的系統, 它是貝安諾 (参看第 115—116 頁注①) 在 1889 年給出的。算术和它的不同部分的几个公理系統——特别是复数算术的第一个公理系統——是亨丁頓 (参看第 135 頁注①) 发表的。

公理 2'. 如果 $x < y$, 那么 $y \nless x$.

公理 3'. 如果 $x < z$, 那么有一个数 y , 使得 $x < y$ 而且 $y < z$.

公理 4'. 如果 K 和 L 是任何数的集合 (即, $K \subset N$ 而且 $L \subset N$), 它們滿足条件:

对于属于 K 的任何 x 和属于 L 的任何 y , 我們有: 如果 $x < y$, 那么有一个数 z , 对于这个 z , 下面的条件成立:

如果 x 是 K 的任一元素, 而 y 是 L 的任一元素, 又如果 $x \neq z$ 而且 $y \neq z$, 那么 $x < z$ 而且 $z < y$.

公理 5'. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

公理 6'. 对于任何数 x 和 y , 有一个数 z , 使得 $x = y + z$.

公理 7'. 如果 $x + z < y + t$, 那么 $x < y$ 或 $z < t$.

公理 8'. $1 \in N$.

公理 9'. $1 < 1 + 1$.

§62. 第一个公理系統의 进一步描述, 它的 方法論上的优点和教学上的缺点

前节列举的公理分为三类。第一类包括公理 1'—4', 在这一类中只有“ N ”和“ $<$ ”两个基本詞項出現; 公理 5'—7' 属于第二类, 在这一类中我們有加添的符号“ $+$ ”; 最后, 第三类包括公理 8' 和 9', 新的符号“ 1 ”在其中出現。

在第一类公理中有两个我們以前沒有遇到过, 即公理 3' 和 4'。公理 3' 称为小于关系的稠密性定律——它表明小于关系在所有的数的集合中是稠密的。一般地我們說, 关系 R 在类 K 中是稠密的, 如果对于这一类的任何二个元素, 公式:

$$xRy$$

总是蕴涵存在类 K 的一个元素 z , 对于这个 z ,

$$xRz \text{ 而且 } zRy$$

成立。公理 4' 称为小于关系的連續性定律或者連續性公理，又或，戴德鏗公理(Dedekind's axiom)^①；为了一般地陈述，在什么条件下，关系 R 称为在类 K 中是連續的，只須在公理 4' 中以“ K ”代替“ N ”(以及与此相联系，以“类 K 的元素”这一表达式代替“数”这一个詞)，并以“ R ”代替“ $<$ ”。如果类 K 为关系 R 排成一定序列，又如果 R 在 K 中是稠密的或連續的，那么 K 分別称为稠密地排成次序或連續地排成次序。

公理 4' 直觉上不如其余公理明显，而且是比较复杂；原因就在于它所涉及的不是个别的数，而是数的集合，因而和其它的公理不同。为了給这个公理一个比較简单而且比較易于了解的形式，令下列定义在公理的前面，这样做是方便的：

我們說，数的集合 K 先于数的集合 L ，当且仅当， K 的每一个数小于 L 的每一个数。

我們說，数 z 分隔数的集合 K 和数的集合 L ，当且仅当，对于不同于 z 的任何两个元素， K 中的 x 和 L 中的 y ，我們有：

$$x < z \text{ 而且 } z < y.$$

在这两个定义的基础上我們能够简单地陈述連續性公理如下：

如果一个数的集合先于另一个数的集合，那么至少有一个数分隔这两个集合。

我們从前面的討論已經熟悉了第二类所有的公理。第三类公理虽然是新的，但是具有如此简单和明显的内容，以致几乎不需要任何的解釋。或者我們仅作这样的說明，如果公理 9' 的前面有符

① 这个公理是德国数学家戴德鏗(R. Dedekind, 1831—1916)創立的，不过他表示得稍为复杂一些。他的研究对于算术的基础，特别是无理数理論的基础，有巨大貢獻。

号“0”的定义和表达式“正数”的定义,那么公理 9' 可以为公式:

$$0 < 1$$

或者为語句:

1 是一个正数

所代替。

公理 1', 2', 5', 6' 和 7' 正好构成我們所說的系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$, 系統 $\mathfrak{U}^{(3)}$ ——就像等价的系統 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 一样——将所有的数构成的集合刻划为一个有序交換群(参看 §57)。考虑新加的公理 3', 4', 8' 和 9' 的内容,現在我們可以描写整个系統如下:

系統 $\mathfrak{U}'$ 表明,所有的数的集合对于 $<$ 关系和加法运算是一个稠密地和連續地有序交換群,而且它在这个集合中挑出一个正的元素 1 来。

从方法論的观点看来,系統 $\mathfrak{U}'$ 有一些优点。就形式而論,在所有已經知道的构成全部算术的充足基础的公理系統中,它是最简单的一个。除公理 1 以外——公理 1 可以从其余的公理推演出来,虽則并不十分容易——,这个系統的所有其它公理以及在这些公理中出現的基本詞項是互相独立的。另一方面,系統 $\mathfrak{U}'$ 的教学价值是較小的,因为基础的简单使得进一步的构造相当复杂,甚至乘法的定义,和有关这个运算的基本定律的推演都不易于作出。几乎从一开始,論证就必须使用連續性公理(例如,沒有这个公理的帮助,在系統 $\mathfrak{U}'$ 的基础上就不可能证明数 $\frac{1}{2}$ 的存在,也就是,使得 $y+y=1$ 的数 y 的存在),并且初学者通常会发现根据这个公理所作的推論是頗为困难的。

§63. 实数算术的第二个公理系統

因为上面提到的理由,值得去寻找一个不同的公理系統,在这

个公理系統之上构造算术。一个这样的系統可以用以下方法得到。我們用系統 $\mathfrak{N}^{(2)}$ 作为我們的出发点。我們將采用三个新的基本詞項：“零”，“一”和“积”；像通常一样，头两个将用符号“0”和“1”来代替，同时表达式“数（或因子） x 和 y 的积”（或“ x 乘 y 的結果”）将用习用的符号“ $x \cdot y$ ”来代替。此外，将加进十三个新的公理；在这些新公理中，有两个是我們已經知道的，即連續性公理和加法的可行性定律。这样，最后我們得到系統 $\mathfrak{N}''$ ， $\mathfrak{N}''$ 包含六个基本詞項“N”，“<”，“+”，“0”，“ $\cdot$ ”和“1”，而且由以下二十个語句所組成：

公理 1''。如果 $x \neq y$ ，那么 $x < y$ 或 $y < x$ 。

公理 2''。如果 $x < y$ ，那么 $y \nless x$ 。

公理 3''。如果 $x < y$ 而且 $y < z$ ，那么 $x < z$ 。

公理 4''。如果 K 和 L 是任何滿足以下条件的数的集合：

对于屬於 K 的任何 x 和屬於 L 的任何 y ，我們有：如果 $x < y$ ，那么有一个数 z ，对于这个 z ，下列条件成立：

如果 x 是 K 的任一元素而 y 是 L 的任一元素，又如果 $x \neq z$ 而且 $y \neq z$ ，那么 $x < z$ 而且 $z < y$ 。

公理 5''。对于任何数 y 和 z 有一个数 x 使得 $x = y + z$ （換句話說：如果 $y \in \mathbf{N}$ 而且 $z \in \mathbf{N}$ ，那么 $y + z \in \mathbf{N}$ ）。

公理 6''。 $x + y = y + x$ 。

公理 7''。 $x + (y + z) = (x + y) + z$ 。

公理 8''。对于任何数 x 和 y ，有一个数 z ，使得 $x = y + z$ 。

公理 9''。如果 $y < z$ ，那么 $x + y < x + z$ 。

公理 10''。 $0 \in \mathbf{N}$ 。

公理 11''。 $x + 0 = x$ 。

公理 12''。对于任何数 y 和 z ，有一个数 x ，使得 $x = y \cdot z$ （換句話說：如果 $y \in \mathbf{N}$ 而且 $z \in \mathbf{N}$ ，那么 $y \cdot z \in \mathbf{N}$ ）。

公理 13''. $x \cdot y = y \cdot x$.

公理 14''. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

公理 15''. 对于任何数 x 和 y , 如果 $y \neq 0$, 那么有一个数 z , 使得 $x = y \cdot z$.

公理 16''. 如果 $0 < x$ 而且 $y < z$, 那么 $x \cdot y < x \cdot z$.

公理 17''. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

公理 18''. $1 \in N$.

公理 19''. $x \cdot 1 = x$.

公理 20''. $0 \neq 1$.

§64. 第二个公理系统的进一步描述;

域的概念和有序域的概念

在系统 $\mathfrak{N}''$ 中, 像在系统 $\mathfrak{N}'$ 中一样, 可以区分三类公理。公理 1''—4'' 组成第一类公理, 在其中我们只有两个基本词项 “N” 和 “<”; 第二类公理由公理 5''—11'' 所构成, 它包含另外两个符号: 加号 “+” 和符号 “0”; 最后, 第三类由公理 12''—20'' 所构成, 它主要包含乘号 “·” 和符号 “1”。

除公理 10'' 和 11'' 以外, 头两类的所有公理是我们已经知道的。公理 10'' 和 11'' 一起说, 0 是加法运算的一个(右)单位元素。一般地, 一个元素 u 称为是运算 O 在类 K 中的一个右的或左的单位元素, 如果 u 属于 K , 而且如果 K 的每一个元素 x 分别满足公式:

$$x O u = x \text{ 或 } u O x = x.$$

如果 u 既是一个右的又是一个左的单位元素, 那么它简单地称为运算 O 在类 K 中的一个单位元素; 显然, 在一个交换运算 O 的情形下, 每一个右的或左的单位元素就是一个单位元素。

第三类的头三个公理, 即公理 12''—14'', 是乘法的可行性定

律、交換律和結合律；它們恰好对应于公理 5''—7''。公理 15'' 和 16'' 称为乘法的右可反性定律和对于小于关系的乘法单調定律。这些公理对应于加法的可反性定律和单調定律，但不是十分准确的。差別在于这一事实，即它們的假設包含限制的条件：“ $y \neq 0$ ”和“ $0 < x$ ”；因此，尽管它們的名字如此，它們并不容許我們簡單地断定，乘法是可反的或者它对于 $<$ 关系是单調的（在 §47 和 §49 的意义上）。

公理 17'' 建立加法和乘法之間的一个基本联系；它是所謂的乘法对于加法的分配律（或者严格地說，右分配律）。一般地說，运算 P 称为在类 K 中对于运算 O 是右分配的或左分配的，如果类 K 的任何三个元素 x, y 和 z 分別滿足公式：

$$xP(yOz) = (xPy)O(xPz)$$

或

$$(xOy)Pz = (xPz)O(yPz)。$$

如果运算 P 是交換的，右分配和左分配两个概念相合，我們簡單地說，运算 P 在类 K 中对于运算 O 是分配的。

最后三个公理是关于数 1 的。公理 18'' 和 19'' 一起說，1 是乘法运算的一个右单位元素。公理 20'' 的内容不需要任何說明；这个公理在算术的构造中所起的作用要比最初設想的大，因为沒有它的帮助，不可能证明所有的数构成的集合是无穷的。

为了簡單地描述在公理 5''—8'', 12''—15'' 和 17'' 中归之于加法和乘法的全部性质，我們說，这些公理将集合 N 刻划为对于加法和乘法运算的一个域（或者比較精确地說，一个交換域）。又如果考虑次序公理 1''—3'' 和单調公理 9'' 和 16''，集合 N 被刻划为对于 $<$ 关系及加法运算和乘法运算的一个有序域。讀者会很容易地推測出来，域的概念和有序域的概念如何推广到任意的类，运算和关系上去。——最后，如果考虑連續性公理 4'' 和关于数 0 与 1 的公理，即公理 10'', 11'', 18''—20''，那么整个公理系統 $\mathfrak{N}''$ 的内容可

以描述如下:

系統 $\mathfrak{U}''$ 表明, 所有数的集合是对于 $<$ 关系及加法和乘法二个运算的一个連續地有序域, 系統 $\mathfrak{U}$ 还在这个集合中挑出两个不同的元素 0 和 1 来, 其中 0 是加法的单位元素, 而 1 是乘法的单位元素。

§65. 两个公理系統的等价; 第二个系統的方法論上的缺点和教学上的优点

公理系統 $\mathfrak{U}'$ 和 $\mathfrak{U}''$ 是等价的 (或者不如說, 第一个系統一經增加符号“0”的定义和乘号“ $\cdot$ ”的定义——这两者可以利用它的基本詞項陈述出来——, 两个系統就成为等价的)。不过, 这个等价性的证明不容易。誠然从第二个系統的公理推演出第一个系統的公理不是特別困难; 但是一涉及相反方向的工作, 从我們早先的說明已經得出, 在第一个系統的基础上, 定义乘法和证明支配这个运算的基本定律 (它們在第二个系統中作为公理出現) 都相当困难。

系統 $\mathfrak{U}'$ 在方法論方面大大胜过系統 $\mathfrak{U}''$ 。在 $\mathfrak{U}''$ 中公理的数目是 $\mathfrak{U}'$ 中的两倍多。这些公理不是互相独立的; 例如, 公理 5'' 和 12'', 即加法和乘法的可行性定律, 可以从其余公理推演出来, 或者, 如果保留这两个公理, 其它的一些公理, 如公理 6'', 11'' 和 14'', 可以消去。基本詞項也不是独立的, 因为其中的三个, 即“ $<$ ”, “0”和“1”, 可以用其它的来定义 (*在 §53 中已經陈述了符号“0”, 的一个可能的定义*), 因之公理的数目可以更加减少。

所以, 我們知道系統 $\mathfrak{U}''$ 容許各种各样重要的化簡; 但是作为这些化簡的結果, 这个系統在教学上的优点会大大地减少。而这些优点确实是很大的。在系統 $\mathfrak{U}''$ 的基础上, 可以毫无困难地发展实

数算术的最重要的部分，——如像数之間的基本关系的理論，加、减、乘、除四种初等算术运算的理論，綫性方程式，不等式和函数的理論。这里要用的推論方法是十分自然和非常初等的；特别是在这个阶段連續性公理完全不参加进来，只是当我們过渡到乘方、开方，取对数这些“高等”算术运算时，它才起重要的作用，而它对于无理数存在的证明則是不可少的。我們不知道有其它的公理和基本詞項的系統，为实数算术的一个初等的，同时是严格地演繹結構，提供一个更便利的基础。

练 习

1. 证明：所有正数的集合，关系 $<$ ，乘法运算和数2 构成系統 $\mathfrak{U}'$ 的一个模型，因此，这个系統在算术中至少有两个不同的解釋。

2. 第V章第6题列举的关系中哪些是稠密的？

*3. 我們如何表示——用关系演算的符号——关系 R （在全类中）是稠密的？我們如何用关系演算中的一个等式表示关系 R 既是傳遞的又是稠密的？（參看第V章练习第17题。）

4. 以下一些数的集合中哪些为关系 $<$ 稠密地排成次序：

(a) 所有自然数的集合，

(b) 所有整数的集合，

(c) 所有有理数的集合，

(d) 所有正数的集合，

(e) 所有不等于0的数的集合？

*5. 为了在系統 $\mathfrak{U}'$ 的基础上证明数 $\frac{1}{2}$ 的存在，也就是，使得

$$z + z = 1$$

的数 z 的存在，我們可以如下进行。令 K 是所有滿足

$$x + x < 1$$

的数 x 的集合, 同样地令 L 是所有满足

$$1 < y + y$$

的数 y 的集合。我們首先证明, 集合 K 先于集合 L 。現在应用連續性公理, 我們得到分隔集合 K 和 L 的一个数 z 。其次可以证明数 z 既不能属于 K (否則在 K 中就有一个数 x 大于 z) 也不能属于 L 。从此我們能够推論 z 是所求的数, 換句話說,

$$z + z = 1$$

成立。詳細作出上面大致敘述的证明。

*6. 推广上題的方法, 在系統 $\mathcal{U}'$ 的基础上证明以下定理 T:

T. 对于任何数 x , 有一个数 y , 使得 $x = y + y$ 。

比較用这种方法得到的結果和 §60 的說明。

*7. 用上題中的定理 T 代替系統 $\mathcal{U}'$ 中的公理 3'。证明这样得到的語句系統等价于系統 $\mathcal{U}'$ 。

提示: 为了从改变了的系統推演公理 3', 在 T 中以 " $x + z$ " 代換 " x "; 由于公理 3' 的假設, 能够容易地证明, 数 y 滿足这个公理的結論。

*8. 用借解釋证明的方法证明: 在去掉公理 1 以后, 系統 $\mathcal{U}'$ 成为互相独立的公理的一个系統。

*9. 推广第 VIII 章练习第 2 題, 給出公理系統 $\mathcal{U}'$ 和 $\mathcal{U}''$ 的一个几何解釋。

*10. 用邏輯符号写出系統 $\mathcal{U}'$ 和 $\mathcal{U}''$ 的所有公理。

11. 减法运算和除法运算以及在第 VIII 章练习第 3 題中提到的一些运算在所有的数构成的集合中有没有右的或左的单位元素, 或者简单地說, 单位元素? 点集加法运算和乘法运算在所有点集的类中有没有单位元素?

*12. 证明: 在一个类中交换的任何运算在这个类中至多有一

个单位元素。又，推广第 VIII 章练习第 24 题中得到的結果，证明以下群論定理：

如果类 K 是对于运算 O 的一个交換群，那么运算 O 在类 K 中恰恰有一个单位元素。

13. 考虑加、减、乘、除和乘方五种算术运算。簡明陈述这样一些語句，它們断定这些运算中的一个对于其它的运算是右分配的和左分配的（一共有 40 个这样的語句），并且判定其中哪些是真的。

14. 就第 VIII 章练习第 3 题中引进的 A , B , C 和 L 四种运算，解和上题相同的問題。又，证明：在某一个数的集合中可行的每一个运算，在这个集合中对于运算 A 和 B 是右分配的和左分配的。

15. 类的加法对于乘法是分配的吗？反过来，类的乘法对于加法呢？（参看第 IV 章练习第 15 题。）

16. 第 4 题中列举的那些数的集合对于加法和乘法是域吗，或者对于这些运算和关系 $<$ 是有序域吗？

17. 证明：由数 0 和 1 組成的集合，对于第 VIII 章练习第 6 题中定义的运算 $\oplus$ 和乘法是一个域。

18. 找出在数 0, 1 和 2 上的这样两种运算，使得这三个数组成的集合对于这两种运算构成一个域。

19. 如何利用乘法定义符号“1”？

20. 以下定理可以从系統 $\mathcal{U}'$ 的公理推演出来：

如果 $0 < x$ ，那么有一个数 y ，使得 $x = y \cdot y$ 。

假設这个定理已經证明，利用它从系統 $\mathcal{U}'$ 的公理推演下列定理：

$x < y$ ，当且仅当， $x \neq y$ ，并且有一个数 z ，使得 $x + z \cdot z = y$ 。

这个定理是否表明，§65 中关于系統 $\mathcal{U}'$ 的基本詞項的数目可能减少所作的說明正确无誤？

*21. 在系統 $\mathcal{N}''$ 的基础上证明第 6 題的定理 T。比較这个证明和第 6 題中关于系統 $\mathcal{N}'$ 所提示的证明, 两个证明中的哪一个比較困难和需要較多的邏輯概念的知識?

提示: 为了从系統 $\mathcal{N}''$ 推演定理 T, 应用公理 15'', 但以“1+1”和“y”分別代換“y”和“z”(不过, 首先必須证明 1+1 不同于 0); 如是得到一个数 y, 利用公理 13'', 17'' 和 19'' 能够证明它滿足定理 T 中所給的公式。

*22. 从系統 $\mathcal{N}''$ 的公理推演系統 $\mathcal{N}'$ 的所有公理。

提示: 为了推演出公理 3', 可以假定第 6 題的定理 T 已經在系統 $\mathcal{N}''$ 的基础上证明 (参看前一练习); 由此用与第 7 題中相同的方法进行。

推 荐 的 讀 物

在本书結束的时候,我們想向讀者推荐一些著作,它們对加深与扩大本书所要求的知識是会有帮助的。在下面所列举的著作中,虽然沒有一本是系統地全面地討論了所有本书所談到的問題,但是,事实上,目前教科书关于本书研究的这个領域所提供的文献,还是相当貧乏的,我們很难举出許多既明白易懂又具备应有的严格性的书。

亨丁頓著:《代数的基本命題》(The Fundamental Propositions of Algebra), J. W. 楊所編《有关初級的現代数学問題的論文集》(1911,紐約)中的第四本。

我們向对于本书最后两章所談問題有兴趣的讀者推荐这本书。讀者将会发现,在这本书中,关于实数与复数算术公理基础的方法論研究的成果有一簡要、准确与清楚的陈述。

路易士著:《符号邏輯研究》(A Survey of Symbolic Logic), 巴克萊 1918 年(已絕版)。

这本书中关于系統的部分,虽已有些过时,但是,关于历史的部分,却是值得极力地推荐。因为,这本书对于現代邏輯的发展提供了許多重要的与有系統的知識。

路易士与兰福德 (C. H. Langford) 合著:《符号邏輯》(Symbolic Logic), 紐約 1932 年。

这本书包含了关于符号邏輯与演繹科学方法論方面非常有意义与重要的材料,特別是語句演算与它的方法論的材料。然而,它不能作为邏輯与方法論的系統教科书,因为,关于邏輯与方法論的

許多重要問題，它都沒有涉及。路易士教授在《符号邏輯研究》那本书中所提出的有价值的历史材料，沒有包含在这本书中。

罗素著：《数理哲学导論》(Introduction to Mathematical Philosophy)，倫敦 1921 年(2 版)。

这本书对于現代邏輯的那些最重要的概念給予了清楚与易懂的說明，特別是关于那些证明数学是邏輯的一部分必須应用的概念。尤其是，在我們这本书中沒有討論或只是粗淺地涉及的問題，如类型理論或有关无穷公理与選擇公理的問題，在罗素这本书中都加以討論。这本书可以作为研究下面要提到的《数学原理》的准备讀物。

楊(J. W. Young)著：《关于代数与几何基本概念讲义》(Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry)，紐約，1911 年。

在这本內容非常丰富的小书中，讀者将会看到許多属于数学方法論領域的討論与例证。此外，讀者还可以从这本书中学习一些关于一般集合論的基本概念。

烏德格(J. H. Woodger)著：《理論构造的技术》(The Technique of Theory Construction)，芝加哥，1939 年，統一科学的国际百科全书，第 2 卷，第 5 号。

这篇短的論文，通过一个具体例子，将使讀者熟悉如何构造一个形式化的演繹理論的技术。这本书也包含了关于一般的方法論問題的討論与关于应用演繹方法到經驗科学的可能性与有效性的討論。我們极力地推荐这本书，特別是推荐给那些对最后一个問題有兴趣的讀者。

下面两本书比前面那些书要艰深得多：

卡尔納普著：《語言的邏輯語法》(The Logical Syntax of

Language), 紐約与倫敦, 1937 年。

这本书是重要的, 但却是不容易讀的。它的内容相当于我們在 §42 中所談到的演繹科学方法論。这本书的重点, 放在演繹科学方法論的研究成果方面, 还不如放在概念工具的推演方面多。这本书在系統与推演部分的处理上是頗为簡略的, 这要求讀者在抽象的演繹的思考方面有相当大的能力, 来填补书中的缺略, 在有些地方, 甚至来改正作者的論证。这本书特別值得推荐给那些对于方法論的研究的哲学意义有兴趣的讀者。在这本书的整个篇幅中, 讀者将会看到許多有关上述問題的討論, 尤其是在这本书的最后部分, 还会看到对上述問題的系統意見。

怀特海与罗素著:《数学原理》, 共 3 卷, 劍桥 1925 年和 1927 年, 第 2 版。

这本书曾經多次在我們的书中被引用过。这本书无疑地是现代邏輯的最有代表性的著作。同时, 就它所产生的影响而論, 它給邏輯研究的发展划出了一个新的时代。作者的目的, 是要构造一个完全的邏輯系統, 这个邏輯系統將給数学基础提供一个充分的根据。这本书彻底地全面地完成了这个任务 (虽然不是在每个細節上都合乎今天方法論的最严格的要求)。对于多数人, 学习这本用很多符号語言写成的书, 将会是不容易的, 但是, 对于任何一个人, 如果他想获得关于现代邏輯所用的概念工具的透彻知識, 这本书却是不可少的。

从外国文献中, 我們推荐下面这些书, 在英文中, 与它們严格相当的著作, 还是找不到的:

卡尔納普著:《邏輯斯蒂綱要》(Abriss der Logistik), 維也納, 1929 年《科学世界观論文》(Schriften zur Wissenschaftlichen Weltauffassung) 卷 2。

这本书虽然很短,但是,它給了現代邏輯的所有重要概念一个清楚的考察,因而,它是上面所提到的那本《数学原理》的通俗化。此外,在这本书中,我們可以看到一些应用邏輯概念与方法到其他科学中的有意义的例子。

格来林(K. Grelling)著:《集合論》(Mengenlehre),萊比錫与柏林,1924年(《数学与物理丛书》,卷58)。

如果讀者想知道集合論一般理論的最重要概念与根本性成果,而又不想致力于更深入的研究,我們向讀者推荐这本容易讀懂的小书。

希尔伯特与阿克曼著:《数理邏輯綱要》(Grundzüge der theoretischen Logik),柏林1938年,第2版《数理科学基础理論》(Grundlehren der mathematischen Wissenschaften),卷27。

这本书概述了数理邏輯的那些初步的与基本的部分,并且討論了这些部分的最重要的方法論問題。这本书既严格又易懂,可以作为系統地与深入地研究邏輯与方法論的入門书。

蕭尔茲(H. Scholz)著:《邏輯史》(Geschichte der Logik),柏林,1931年(《分科哲学史》,卷4)。

这本书对于邏輯从古代直到今天的发展給予了历史的叙述。作者对于現代邏輯的广泛的作用的相信,渗透在这书的每一頁中。文体的生动与鮮明,使得这本书甚至对一般人也是富有吸引力的。

希尔伯特与貝尔納斯著:《数学基础》(Grundlagen der Mathematik),共2卷,1934年与1939年《数理科学基础理論》(Grundlehren der mathematischen Wissenschaften),卷40与50。

这本书对数学方法論迄今所获得的較为重要的成果給予了一个丰富的、虽然不是全面的陈述(这里数学方法論是§42所談的那个意义)。由于作者在方法論方面的理論观点,这本书的重点,

是放在用所謂构造論方法所获得的那些研究成果上。对这本书(在同类书中,它是唯一的)沒有透彻的研究,就很难在方法論的領域中能够进行独立的研究工作。在讀这本书时,是会碰到一些困难的,讀者会感到,这本书中材料为甚么如此安排的理由不是很明显的;但是,从这本书所陈述的都是最新的研究成果与这本书所涉及的又是一个正在迅速发展的領域这个事实来看,上述那些缺点毕竟是很难避免的。

最后我們要提到一下,在美国有一个特別的社团,即符号邏輯学会,它联合了邏輯与方法論方面的所有科学工作者,从1936年起,这个学会发行了一种季刊:《符号邏輯杂志》(Journal of Symbolic Logic),車尔赤与納盖主編。这个杂志既登載創造性論文,也登載关于目前邏輯文献的評論。这个期刊的卷1中有一篇車尔赤編纂的詳尽的目录,包括了1935年以前数理邏輯的全部著作,在卷3(1938)中又补充了这个目录。

俄譯本編輯部注

⊖作者在这里作为一个典型的形而上学者在发議論，他否认有改变着的本质，并且作为唯心主义者，他认为思維規律对于自然規律來說是第一性的。在現代数学中确实沒有考察“变数”概念，但并不是因为作者所指出的原因，而是因为为了用数学方法来研究，必須使所研究的概念服从于形式邏輯的規律，即对关于它們的某些屬性的問題可以給予完全确定的回答：“是”或“否”。(第2頁)

⊖我們要提醒說：在算术中并不表示数的常項，例如加号“+”，不等号“>”等等。(第4頁)

⊖所以使用这种省略的術語，是因为如果在指示函項中以某个数字来代替变項符号，則它就变成了完全确定的(依所代入者而定)数字記号。(第5頁)

⊗我們要指出，这个命題也可以表述如下：無論我們怎样选取数 x 和 y ，总可以找到由它們决定的数 z ，使得

$$x = y + z。$$

这对于实数当然是正确的，因為它們是始終可以減除的。可是如果我們仅仅限于非負数，則并非对于任何一对数 x, y 都存在着数 z ，使得 $x = y + z$ 。对于 $x = 3, y = 5$ 这一对数來說 z 就是不存在的。

我們还要指出，“可以找到”这个詞并不完全合适。只要求这种数存在着而不管我們能否找到它。(第7頁)

⊕我們要指出，在数学中有时并不加量詞。不过包含着自由变項的任何已证明的表达式(公理或公理的推論)，通常都被看作

为語句，而不是語句函項，并且认为自由变項是为全称量詞約束着的。

比如，作者所引的命題

$$a+b=b+a$$

或者

$$|\sin x| \leq 1,$$

或者

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

就是这样的。(第 7 頁)

⑥这里問題不在于思維經濟。現代数学的符号标記对于理解和使用來說，确实比古代希腊人的方法方便(希腊人的方法是以語詞叙述一切对象和运算)，因为补充了通常口語的标記对象和記述命題的符号方法，扩大了数学的可能性。(第 11 頁)

⑦这个一般陈述如下：

在語句函項的某个地方出現的变項在这个地方是約束的，当且仅当，这个变項在前面量詞中出現，而量詞的作用又及于語句函項的該部分。(第 14 頁)

⑧这里所談的一切当然都是有关形式邏輯的。作者所提到的所有術語中，最合适的是“数理邏輯”。数理这个詞之所以合适，是因为它研究的基本对象，是数理学科的邏輯結構及它所使用的证明方法，所以它本身也就作为数理学科建立起来。“邏輯斯蒂”这个術語特別不合适，因为現代外国資產階級数理哲学的唯心主义流派之一常常同它相联系。(第 15 頁)

⑨如在序言中所指出的，作者常常作为形而上学者发表議論。比如在这里他假定任何命題不是真的就是假的，并且只能是非此即彼，以便由它們所发展起来的語句演算常常是可以机械地运用的。因此他沒有提出“語句”这个概念的定义。为了正确地理解

“关于語句演算”这一整章，需要注意，称之为語句的乃是或真或假，并且只能是非此即彼的命題。（第16頁）

⊕但是由此不能得出結論說，似乎在数理邏輯中真的概念實質上是不同于通常的意義的。問題的實質在于“如果…，那么…”这种联詞的定義上。要明白這一點，我且舉一個例子。同一個“Канон”這個詞，在应用到比如宗教儀式或美學規則的總和上時，具有雖然相似的但畢竟基本上不同的意義。在应用到音樂上或印刷事業（它在那里只簡單地意味着“標題活字”）上時具有完全不同的意義。因此，关于這個詞在其中出現的詞句的真或假的問題，只有在確定“Канон”這個詞在其中以何種意義來使用之後才能解決。同樣，如果我們改變了联詞“如果…，那么…”的意義，則包含着這個联詞的表達式的真或假的問題，應當視我們以何種意義來使用它而解決。如果像在作者所引證的例子中，我們只在下述論斷的意義上來理解表達式“如果 A ，那么 B ”，即“ A 是假的或者 B 是真的”，也就是說兩個判斷“非 A ”或“ B ”中，至少有一個是正確的（或者是非 A ，或者是 B ——如果存在的話），——則我們應當認為這兩個命題都是真的：“如果 $2 \cdot 2 = 5$ ，那么紐約是一大城市”，和“如果 $2 \cdot 2 = 5$ ，那么紐約是一小城市”。关于語句之間的這種排斥前者真同時后者假（并以此為限）的可能性的聯系——把它称之为條件語句并借助于联詞“如果…，那么…”來表示——有無意義這個問題乃是另一回事。可是數學證明的實踐表明，第一，在數學中經常與這種联詞打交道，并且第二，用联詞“如果…，那么…”來表達它們，決不會導致誤解。欲知其詳，請參見下面特別是下一節專門論述數學中的蘊涵問題的一節。（第25頁）

⊕⊖联詞“如果…，那么…”在數學中通常也表明前件与后件之間的原因和結果的邏輯聯系。可是由于數學反映着外在世界各

种对象之間的最简单的联系，这些邏輯联系在那里只从外部方面来加以研究，于是它們好像是能够以形式蘊函的形式表現出来，而形式蘊函則是借助于实质蘊函和全称量詞来表現的。因为在数学以及与它有联系的数理邏輯中这种論证是足够的，所以在那里处理的是实质蘊函。可是在演繹科学的方法論中，对于邏輯联系的考察要深刻些，因此在这里实质蘊函的概念是不够的。（第 29 頁）

⊕⊖实质上这里所談的只是在所謂精确科学中遇到的定义。而且并不假定該詞項在它被定义之前存在着，而是由定义本身引入的。比如，《 $n!$ 》是借助于这种定义： $1 \cdot 2 \cdots n$ 的积的一种縮写而引入的。

欲知其詳，請參見本书第二部分。（第 33 頁）

⊕⊖这些語句的真是从我們的实质蘊函的定义和从任何語句不是真就是假并且只能是非此即彼这种情况得出来的。現在我們来考察一下語句

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p),$$

即

(I) 从 p 得出 q ，或者从 q 得出 p 。因为任何語句不是真的就是假的，并且只能是非此即彼，所以只能在下列情况中出現：

- (1) 語句 p 真和語句 q 真，
- (2) 語句 p 假而語句 q 真，
- (3) 語句 p 真而語句 q 假，
- (4) 語句 p 假和語句 q 假。

在这四种情况的任何一种情况中語句 (I) 都是真的。比如我們来檢驗第三种情况。

在这个情况中，語句“从 p 得出 q ”是假的，因为 p 是真的，而 q 是假的，而語句“从 q 得出 p ”是真的，因为 q 是假的，而 p 是真的。

因为即使析取式的一个元素是真的,析取式也是真的,所以整个語句(I)是真的。

如果为进行諸如此类的檢驗复杂語句的真假值而編制图表,則即获得真值表方法。(第 41 頁)

⊕④正确的代換,对于数理邏輯來說是一种从一般轉化为特殊的專門的方法。它的确切的表述是很难的。(第 46 頁)

⊕⑤可是数学的对象决不是机械地容許依照这里所指出的規則来論证。必須对形式邏輯規律可以应用的程度作專門的研究(这一点塔爾斯基作为一位学者,是知道得很清楚的)。此外,数学体系是这样复杂,在其中犯錯誤不是怎样的难事。誠然,推論規則提供了經常找出錯誤的可能性。最后,在数学体系中,主要的不是依照完全的证明的全部規則来进行的个别論证,而是以一定的程序和一定的联系来进行的它們的整个进程。(第 47 頁)

⊕⑥語句(b)是真的,如果是就除了星期一(那时它是假的)以外的一周內的任何一天来讲的話。这是用真值表方法檢驗直接得来的。(第 47 頁)

⊕⑦选言的表达法——是这样一种方法,其中語句是以联詞“或者…,或者…”結合起来的。据此,語句(a)的选言表达法如下:或者 x 不能为 10 除尽,或者 x 能为 2 和 5 除尽。(第 48 頁)

⊕⑧下面是最后三种表达式的表述:

(b) 从 p 得出 q , 当且仅当 p 是假的或者 q 是真的;

(c) 从 p 得出 q , 当且仅当 p 或 q 是假的;

(d) 从 p 得出 q , 当且仅当 q 是真的, 或者 p 是假的。

請注意(b)和(d)是真語句,而(c)是假語句(如果在前面加一全称量詞的話)。(第 49 頁)

⊕⑨我們借助于表达式(a)总能够断定(如果某种論断是从其

他論斷得出來的話) 第二個論斷是從第一個得來的。因為真的語句是從任何語句得出來的(在實質蘊函的意義上), 那末任何語句同它的否定一起都是能證明的。很明白, 這樣的邏輯沒有任何價值, 因此語句(a)不能看作是真的。請讀者自己分析語句(b)的情況。(第 50 頁)

⊖⊕我們要指出, 這個定義只有在假定“屬性”的概念已知時才有意義。可是這個定律可以以代換規則的形式來表述, 於是“屬性”的概念就不會明顯地出現。這一規則的表述具有如下形式:

如果 p 等於 q , 則在任何包含 p 的真語句中, 都可以在一個或幾個地方以 p 代 q ; 反之, 如果這一規則可以應用的話, 則 p 等於 q 。

我們要提醒: 在通常的代換規則中, 凡是遇到變項的地方都必須代換。

這個規則表述在下面, 並且作者在这一章中所有的進一步的論證都以此為根據。(第 52 頁)

⊖⊖我們將借助於我們的規則來證明定律(II), (III) 及(IV):

(II) $x = x$ 。

很明白, 如果在任何包含 x 的語句中在一個或幾個地方用自己代替它自己, 則這個語句的意義是不會改變的。

(III) 如果 $x = y$, 那麼 $y = x$ 。

我們假定, 如果在任何包含 x 的真語句中, 在一個或幾個地方用 y 代 x , 則所得語句仍為真的。設語句 A 包含 y , 如果我們在這個語句中用 x 來代 y , 則得語句 B。

由 B 的否定得出 A 的否定, 因為如果 B 的否定是真的, 則 A 的否定也是真的, 因為它是用幾個地方用 y 代 x 而從 B 得出來的, 而 $x = y$; 如果 B 的否定是假的, 則從它可以得出隨便什麼。因此

根据逆反定律从 A 得出 B 是正确的。如果現在 A 是真的話,則按照分离規則,我們可以得出 B 也是真的結論。这就是說,在任何包含 y 的真語句中,我們可以在一个或几个地方用 x 来代它,即

$$y=x。$$

(IV) 如果 $x=y$ 且 $y=z$, 那么 $x=z$ 。

如果我們在包含 x 的真表达式中,在一个或几个地方用 y 来代它,則我們获得真語句;然后如果我們在一切地方,都用 z 来代 y ,則我們又获得真語句。这就是說,如果我們在包含 x 的真語句中,在一个或几个地方用 z 来代它,則我們又获得真語句;因此 $x=z$ 。(第 55 頁)

⊖⊖概念及其名字的这种差別是非常重要的。这种差別在应用于指示函項和語句函項时具有特殊重要的意义。例如:

$$x^2+2x+3$$

这是个指示函項,如果我們用某数来代 x ,它就获得数值。可是称为多項式的

$$“x^2+2x+3”$$

則是数学的另一个部門的对象了。这样,从指示函項和語句函項就获得了数学和数理邏輯其他部分所研究的个别对象。(第 58 頁)

⊖⊗这里作者又作为形而上学者在发表議論了;因为他认为在数学的一切部門,并且在任何情况下,对象都应该与自己同一。在数学的任何部門中根据同一律来作代換需要事先加以审查。关于相等和不等概念的相对性,由称为同余式理論的那个算术部門所证明。在这个部門中整数之間的差数如果等于已知数 n ,則这些整数就被认为是相等的。不錯,在数学中通常檢驗是否可以应用同一律是非常簡單的,因此常被忽略了。(第 59 頁)

⊖⊘在語句的有內容的邏輯結構中,变項正是标志着語句。屬

性就是真或假——这是語句本身的屬性，而語句的演算則研究这种屬性，这种屬性只是依語句的外部形式而定。(显然，塔尔斯基认为在語句演算中所論断的只是关于語句的名字的屬性。)(第64頁)

㊦㊧必須指出，对数学來說，通常的邏輯推論必須先限定被认为是个体的对象的範圍，并且所考察的类仅仅由这些对象构成。(第65頁)

㊦㊨在这一节中研究作为新的单个对象的語句函項。参見注㊦㊩。(第70頁)

㊦㊩我們再一次提醒：許多个体对象的範圍，亦即个体域，或者像現在我們所可以說的，一切个体的类，應該认为是在推論过程中被精确限定的。不錯，在数学和数理邏輯中，各种不同的对象域(視所研究的問題而定)都被作为一切个体的类来考察。(第70頁)

㊦㊪这些問題在現代邏輯中具有非常重要的意义。問題在于，如果容許像在类的理論中所应用的那种类型的一切推論，則可以以各种不同的方法达到矛盾(这就是所謂集合論的諄論)。因为形式邏輯的方法不容許矛盾(否則它就会沒有任何价值)，所以就发生縮小这一类型推論範圍的要求。可是因为数学的許多部門沒有这种推論就不行，所以每一次都需要研究其应用的可能性，而不是根本拋棄它們。罗素的邏輯类型論企图使这种研究成为多余的，这种理論基本上是靠限制数学的邏輯工具的儲备并使之复杂化。最近苏联学者波茨瓦尔和諾維科夫获得了完全不同于罗素派的非常寶貴的結果。(第71頁)

㊦㊫請讀者注意类的理論中 $K \subset L$ 的关系和語句理論中 $p \rightarrow q$ 的关系的平行性。(第72頁)

㊦㊬再請讀者注意类的理論中加法、乘法和求余类的运算与語句理論中邏輯和、积及否定运算的平行性。(第76頁)

⊖⊖下面在 §33 中作者自己指出他关于等势类及关于基数的議論不是完全确切清楚的。我們认为,为了叙述的联系性,这些概念必須在这里解釋清楚。

設我們有两个类 K 和 L ; 我們怎样最好地比較这两个类的元素的个数呢? 大家都知道其中的一个做法: 数一数这个类和那个类的元素, 并比較所获得的数目。可是这个方法不是随时都可以应用的。例如我們来考察个体对象就是正整数的場合; 試比較偶数的类和非偶数的类。很明白, 不能一个一个地数这两个类中的数, 于是我們不得不放棄比較每一个类中的元素的数目的意图, 或者是想出另一种比較方法。

原来我們所知道的那种方法, 除了以上指出的一点以外, 并且还不是最簡單的。还有另一种比較两个类的方法, 讓我們举例來說明。假定我們要知道“狄納摩”运动場票子数目够不够。要了解这一点, 完全不需要数一数有多少人排队买票。只需要把票卖給每一个人; 如果票不够的話, 則排队买票的人多于售票处的票, 如果票有多余, 則人少于售票处的票(实际上是卖給每个人兩張票, 可是我們为了簡單起見, 假定卖給每个人一張票)。

当在售票处卖票时, 这本身就确定了票与卖給票的人之間的某种联系。每一張卖給的票对应于买票的人, 而买票的人則对应于他的票。用这个例子可以說明对应的概念。

在这个例子中类 K (“狄納摩”运动場的票) 和类 L (球迷) 的元素之間有对应关系。假定一切票都售出了 (如在两个强队之間进行比賽时常有的情形), 則 K 类的每个元素都对应于 L 类的某个元素。如一切想买到票的人都有票 (这差不多是不可能的情況), 則 L 类的每一个元素都对应于 K 类的元素。在这种場合, 很明白, 这两个类的元素的数目是相同的。这样, 我們就获得了比較两

个类的元素的数目的新方法：必須确定第一类的元素与第二类的元素之間的对应关系。

如果在 K 类的元素与 L 类的元素之間确定了这样的一种对应关系，即 K 类的每个元素对应于 L 类的元素，而 L 类的每个元素对应于 K 类的元素，并且 K 类的两个不同的元素对应于 L 类的两个不同的元素， L 类的两个不同的元素对应于 K 类的两个不同的元素，則这种对应关系称为一一对应。

如果在 K 类和 L 类元素之間确定了一一对应关系，則这两个类称为等势类。

現在我們用較为严格的观念——基数来代替我們先前“元素的数目”这个观念。 K 类的基数，是与 K 类等势的一切类所具有而任何其他类都不具有的屬性。如果我們有 K 类和 L 类两个类，則抽象地說可能有四种情况：

(1) K 类与 L 类的某些子类等势， L 类与 K 类的某些子类等势。

(2) K 类与 L 类的某些子类等势，但 K 类中不存在与 L 类等势的子类。

(3) L 类与 K 类的某些子类等势，但 L 类中不存在与 K 类等势的子类。

(4) K 类中不存在与 L 类等势的子类， L 类中也不存在与 K 类等势的子类。

在第一种情况下可以证明 K 类和 L 类是等势的；在第二种情况下，自然会认为 L 类的基数大于 K 类的基数；而在第三种情况下， K 类的基数大于 L 类的基数；最后，可以证明，第四种情况是不可能的（應該注意，整个类本身是自己的“非正常的”或“假”的子类）。既然第四种情况是不可能的，則無論 K 和 L 两个类是什么，

或者 K 类的基数大于 L 类的基数,或者 K 类的基数小于 L 类的基数,或者这两个类是等势的。因此基数可以加以比較,即两个不同的基数中,其中之一大于另一个(为了要知道哪一个大,就必须挑选具有給定的基数的类,并把这两类加以比較)。

茲举数例。人的右手所有手指的集合与左手所有手指的集合等势:我們可以把具有同样名称的手指置于对应关系中。人的手和脚的所有指头的集合,具有比单是右手的指头的集合大的基数。小于100的所有一切数的集合,具有比小于50的所有一切数的集合較大的基数。

可是有一种集合,具有与它們自己相同的基数的“真”子集。比如我們来考察一下整数 $0, 1, 2, \dots$ 的集合 I ;偶数 $0, 2, 4, \dots$ 的集合 D 是这个集合的真子集。可是可以建立整数集 I 和偶数集 D 之間的一一对应关系,即令每一个整数 n 对应于二倍于它的偶数 $2n$,令每一个偶数 m 对应于为它的一半的整数 $\frac{m}{2}$,容易看出,这是一一对应关系。

类能够与自己的“真”子类有一一对应关系。这种屬性,是无穷类不同于有穷类的特征。我們要在这里指出:很多无穷类的基数等于自然数的类的基数。例如,自然数类的任何无穷子类的基数,等于整个类的基数,一切有理数集合的基数也是可数的(即所謂自然数类的基数)。可是存在着具有很大的基数的无穷类,例如圓弧上的一切点的类或者一切实数的类。

任何有穷类是与小于某个自然数 n 的所有自然数的类等势的。因此,有穷类的基数可以由某些自然数 n 来表征。(第77頁)

⊖⊖塔爾斯基說可以把算术还原为邏輯,这个論断是不正确的。因为为了还原必須把无穷公理引入邏輯,而无穷公理是有內容的数学公理,这样,全部算术連同无穷公理都一起被包含在邏輯

中了。(第 79 頁)

⊖⊖(a)我們說 $x=y$, 当且仅当, 对于任何类 K , 从 x 包含在类 K 中, 推出 y 也包含在类 K 中, 反之亦然: 如果 y 包含在类 K 中, 則 x 也包含在类 K 中。

(b) 关于类 K 和类 L , 我們說 $K=L$, 当且仅当, 对于任何元素 x , 从 x 包含在 K 中, 推出 x 包含在 L 中, 反之亦然: 如果 x 包含在 L 中, 則 x 也包含在 K 中。(第 81 頁)

⊖⊗如果在类的演算中, 表示类的变項为表示語句的变項所代替, 而运算符: 求余类的符号 ($'$)、和的符号 ($\cup$) 及交的符号 ($\cap$) 相应地为否定符号 ($\sim$)、邏輯和 ($\vee$) 及邏輯积 ($\wedge$) 所代替, 則类的演算的公式会轉化为語句演算的相应公式, 而描述全类的公式会轉化为語句邏輯的真值公式。其原因在于, 語句邏輯就是一共只有一个个体情形下的类的演算; 这时一共只有两类, 全类与空类, 我們令这两类对应于真和假。

另一方面, 如果我們要考察語句函項

$$x \in K, \quad x \in L,$$

則我們又获得可用下列公式表現的語句演算与类演算的运算之間的对应关系:

$$x \in K \cup L \leftrightarrow (x \in K \vee x \in L),$$

$$x \in K \cap L \leftrightarrow (x \in K \wedge x \in L),$$

$$x \in K' \leftrightarrow \sim(x \in K).$$

如果把蘊函 $A \rightarrow B$ 解釋为 $\sim A \vee B$ 的話, 可以用类似的方法建立与推論符号相应的运算。可是它沒有重大的意义。但类的演算还有另一种方式同語句演算联系着。即, 在 $K \subset L$ 的情况下, 如果我們考察一下类 K 和类 L , 則由于元素 x 具有类 K 的屬性, 将得出 x 具有类 L 屬性的結論, 用符号来表示就是:

$$K \subset L \leftrightarrow (x \in K \rightarrow x \in L)$$

这里記号 $\rightarrow$ 属于語句演算。但是这种平行的情况是不完全的。

同时必須注意：类的演算較語句演算容易，至少是因为語句演算的运算是类演算的运算的特殊情形——即全类是由一个元素組成的。（第 82 頁）

③⑤標記的这种区别是因为在邏輯的其他部分所考察的是比如由相等关系联系在一起的諸对象，而这里相等关系本身是所研究的对象。这里我們所处理的是应用抽象法把屬性(集合)或关系作为对象的問題。在数学中常常应用这个方法，并且是非常有成效的。例如，在函数論中把函数，即数之間的某种关系作为对象。然后这个概念又被抽象，于是我們就得到一門新的数学学科，即泛函分析，其所研究的对象就是函数之間的对应关系。（第 89 頁）

③⑥我們將证明： R 在 K 类中如果是对称的、傳遞的和自反的，則它定义一相等关系，如果把 K 类的子类作为对象来考察，其中每一个子类的任何一对元素 x 和 y 都滿足 R 关系。

設 $[x]$ 为由所有一切元素 z 組成的类，对这些元素來說公式

$$x R z$$

成立。

我們必須证明

$$[x] = [y],$$

当且仅当

$$x R y.$$

設有 $x R y$ ，我們要证明在这种情况下 $[x]$ 类和 $[y]$ 类是重合的。事实上，如果 $z \in [x]$ ，即

$$x R z,$$

則公式 $y R x$ 由于对称定律是正确的，而由于

$$yRx \text{ 和 } xRz,$$

按照傳遞定律

$$yRz,$$

即

$$z \in [y].$$

反之, 如果 $z \in [y]$, 即

$$yRz,$$

則由公式

$$xRy \text{ 和 } yRz$$

由于 R 关系的傳遞性而得出:

$$xRz,$$

即 $z \in [x]$ 。因此, 如果元素 z 属于 $[x]$ 类, 則它也属于 $[y]$ 类, 反之, 如果元素 z 属于 $[y]$ 类, 則它也属于 $[x]$ 类, 即 $[x]$ 类和 $[y]$ 类是重合的。

設 $[x]$ 类和 $[y]$ 类重合, 我們要证明, 在这种情况下有如下关系

$$xRy.$$

事实上, 元素 y 属于 $[y]$ 类, 因为由于 R 关系的自反性, 公式

$$yRy$$

成立。从而 $y \in [x]$, 因为 $[y]$ 类和 $[x]$ 类是重合的, 由此得出:

$$xRy. \quad (\text{第 93 頁})$$

⊖⊕ 如果 R 关系在 K 类中是不对称的、傳遞的和連通的, 則当公式

$$xRy$$

成立时, 我們將說 x 先于 y 。

由于这种关系不对称, 如果 x 先于 y , 則 y 不先于 x 。又由于傳遞性, 如果 x 先于 y , 而 y 先于 z , 則 x 先于 z ; 由于連通性, x 和 y 两个元素中一个應該先于另一个。这些屬性也就說明为什么这

种关系被称为序列关系。(第 94 頁)

③⑧可是这里所考察的是作者所混淆的不同的概念。在公式

$$x R y$$

中, R 是关系, $x R y$ 在用事物代入 x 和 y 之后就成为真或假; 如果我們考察表达式 $R(y)$, 則用某事物(适当的个体域內的事物)代入 y 之后, 我們就得到事物, 即一般地說不同于真和假的某种东西。因此, R 在这里是指示函項。这两个概念之間的联系用如下的公理来表达:

任何单值关系 $x R y$ 都与某些等式 $x = R(y)$ 等值, 这里 R 是相应于 R 关系的指示函項。(第 96 頁)

③⑨比如考察一下下列关系

$$(B/\check{C}) \cup [H/(S/\check{C})]:$$

$\check{C}$ ——是“是父母亲”的关系: $x B/\check{C} y$ ——是有一个人 z , 对他來說 x 是 z 的兄弟, 而 z 是 y 的父母亲, 即 x 是 y 的叔父或伯父或舅父。

$x S/\check{C} y$ ——是类似的: x 是 y 的姑姑或姨母。

$x [H/(S/\check{C})] y$ 的意思是: 有一个人 z , 对他來說

x 是 z 的丈夫, 而 z 是 y 的姑姑或姨母。

簡言之:

x 是 y 的姑父或姨父。

因此 $x \{B/\check{C} \cup [H/(S/\check{C})]\} y$ 的意思是:

x 是 y 的叔父或伯父、舅父、姑父、姨父。

这里还要指出: x 的姊妹的兄弟不一定是 x 的兄弟, 这可以是 x 本身; 用符号来表示:

$$B/S = B \cup I$$

(这里 I 是等同符号)。(第 106 頁)

④⑩比如我們来考察一下上一个练习中的关系 B/F 和 F/B 。

第一个表示叔伯，第二个是表示父亲（兄弟的父亲也就是父亲）。

現在我們將證明第二个論斷。設下列公式是正确的

$$x(R/S)y;$$

这就是說

$$y(R/S)x。$$

也是正确的，

即存在着滿足 yRz 和 zSx 这样的 z ，

因此：

存在着滿足 $x\check{S}z$ 和 $z\check{R}y$ 这样的 z ；

从而，

$$x\check{S}/\check{R}y。$$

另一方也同样证明。（第 107 頁）

④⊖(c)我們有

$$\sim xRx,$$

因为由于不对称，对于任何 y ，包括 $y=x$ 在內， xRy 和 yRx 这两个公式中至少有一个是不正确的。上述公式等值于：

$$xR'x;$$

因此， R' 关系是自反的。

其次， xRy 和 yRx 这两个公式中，由于不对称，至少有一个是不正确的。这就是說，

$$xR'y \text{ 或 } yR'x$$

这两个公式中，至少有一个是正确的。

(d) 設下列公式是正确的：

$$xR'y \text{ 和 } yR'z;$$

換言之：

$$\sim xRy \text{ 和 } \sim yRz;$$

由于 R 关系是連通的, 由此得出

$$zRy \text{ 和 } yRx.$$

如果公式

$$xR'z$$

不是正确的, 即公式

$$xRz$$

是正确的, 則由于 R 关系的傳遞性,

从公式

$$xRz \text{ 和 } zRy$$

可得出:

$$xRy.$$

因此, 公式 $xR'z$ 是正确的。(第 111 頁)

④ $\exists xR/Ry$ 是表示存在着这样的 z , 即

$$xRz \text{ 和 } zRy.$$

所有一切語句 $R/R \subset R$ 表示:

如果存在着这样的 z , 即 xRz 和 zRy , 則 xRy , 这就是傳遞性的定义。

公式 $D \subset R \cup \check{R}$ 是表示:

如果 x 不同于 y , 則 xRy 或 yRx ——这是关系 R 的連通性的定义。

对称性的关系, 类似的用下列公式来表示:

$$R = \check{R},$$

不对称性則以下列公式来表示:

$$\check{R} \subset R';$$

不傳遞性用下列公式来表示:

$$R/R \subset R'.$$

公式 $R/\check{R} \subset I$ 表示：

如果存在着这样的 z ，即 xRz 和 $z\check{R}y$ (或 yRz)，則 $x=y$ 。
这是 R 关系单值的定义。(第 111 頁)

④③作者的这些議論是完全沒有內容的。他的理想沒有任何科学意义，并且数学学科的构造原則不是由于某种折衷办法而产生的。

实际上公理方法或演繹方法的任务是确定該学科命題之間的联系及其进一步的发展。(第 114 頁)

④④挑选某些命題作为公理不必是由于其明显性。例如，我們回忆一下洛巴契夫斯基几何学关于平行綫的公理就行了。(关于挑选公理，請參見本书 § 39 注④③。)(第 114 頁)

④⑤作者在下面 (參見注④③) 沒有遵守这个真的定义。(第 114 頁)

④⑥作者在这里告訴我們：我們沒有权利利用这一点以建立演繹理論中命題的真，可是却沒有提出关于我們所掌握的那些工具的完全观念。除了未定义的詞項和公理之外，还應該知道有可能从被认为是真的語句获得也必須认为是真的其他語句的規則。也許作者在这里是假定应用通常的推論規則；作者在下面 (§40) 指出必須有推論規則来构成演繹理論，并且他将在形式化的形式中考察这些規則。

在演繹理論中，除了公理和不定义的詞項之外，也提供可以用来获得这种理論的新語句——定理——的推論規則。必須指出：随着这种理論的发展，規則的儲备扩大了，因为每一个新证明的原理都可以用对于获得新定理适用的推論規則的形式表述出来 (当然也可以借助于旧規則把它們推导出来)。

演繹方法的意义 (除了建立該理論各命題之間的联系之外) 在

于使用这种方法的那些科学中，沒有必要在實踐中檢驗該理論的一切原理；而只要檢驗該理論中基本原理的正確性及推導規則的可應用性就夠了。（第 115 頁）

④⑦应当指出，用这种方法（并且是借助于推導規則）可以構成的，不是整個數理邏輯，而常常只是它的某些部分。（第 115 頁）

④⑧說歐几里德“幾何原本”是實行演繹方法的例子是不正確的。比如，在其中沒有幾何公理的體系：那里所表述的公理差不多都是關於邏輯的恒等概念的，而公設則是確定哪些課題歐几里德認為是已經解決了的（比如關於平行線的公設，是以下列指令的形式表述的：在怎樣的情況下求兩條直線的交點的課題可以認為是已經解決）；在該書中，把其他幾何課題化為那些已認為解決了的課題，這一點佔據着重要的地位。（第 115 頁）

④⑨如果認為在演繹理論中僅僅存在着有窮個基本原理（公理和能行的推論規則）則用演繹法幾乎不能建立一個像樣的數學理論，雖然有一個時候有人認為數學理論之所以不同於其他科學，是因為在數學理論中一切原理都可以由有窮個基本原理推導出來。單是算術就不可能用這樣的方式建立起來。（第 116 頁）

⑤⑩這個闡述得非常好的例子表明：演繹科學的方法論，不僅對於一般地考察這些科學是必需的，而且可以借助於它在這些科學中獲得重要的結果。關於解釋的問題，對於洛巴契夫斯基幾何學具有重要意義。洛巴契夫斯基幾何學，是由於對平行公理獨立於幾何學其他公理的方法論的研究而產生的。當洛巴契夫斯基幾何學在普通幾何學里得到解釋時，這個問題也就在積極的意義上最終解決了。（第 121 頁）

⑤⑪在使用這條定理時，畢竟需要某種程度的慎重。設我們的體系由下面一個公理組成

$$a=0 \vee a=1.$$

从这个公理可以作为結論推导出（简单地借助于全称量詞的另一种写法）：

$$(x)(x=0 \vee x=1).$$

很容易构成由两个元素組成的这个体系的模型，其中之一用符号 0 来表示，另一个用符号 1 来表示。可是由于輕率地应用演繹法定理所能获得的定理

$$a=0 \vee a=1 \rightarrow (x)(x=0 \vee x=1)$$

是不正确的。

为了避免这样应用演繹法定理的可能性这个定理有时以下述这种方式来表述：

如果在演繹理論中，从公理 $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ 得出定理 $\mathfrak{B}$ ，并且在证明这个定理时，沒有代入我們的公理中所有的变項，也沒有用量詞把它們約束起来，則下列邏輯定理是正确的：

$$\mathfrak{A}'_1 \wedge \mathfrak{A}'_2 \wedge \dots \wedge \mathfrak{A}'_n \rightarrow \mathfrak{B}',$$

这里 $\mathfrak{A}'_k$ 是这样得到的邏輯公式，即在表达式 $\mathfrak{A}_k$ 中該理論的一切詞項都用相应的邏輯变項来代替。如果在基本公理中沒有自由变項（这也就是在用塔尔斯基的叙述方法时所发生的），則可以不加附带条件：在证明中不能代入变項，并用量詞把它們約束起来。

（第 122 頁）

㊦㊦作者不正确地把演繹方法的實踐意义同它的理論价值割裂开来。它的實踐意义正是由它的理論价值决定的，即由它借以正确地反映現實的东西决定的。不用馬赫主义者所喜欢的关于思維經濟的議論，比較好的說法是：凡是对事情具有理論看法的人因此就拥有获得結果的較大的实际可能性。（第 123 頁）

㊦㊦如果理論的詞項被理解作变項，即不与某个一定的解釋

联系起来的話，則理論被看作是形式体系；这比起这种說法要确切些：我們把它們看作这样，好像我們不知道它們的意思一样。（第 124 頁）

㊦㊧問題不在于不能給予解釋的形式体系是沒有人对它感到兴趣的，而在于它对科学是沒有絲毫关系的，因为科学是研究现实的。（第 124 頁）

㊦㊦參見注 ㊦㊦ (§26)。（第 125 頁）

㊦㊨关于每个演繹理論，都有考察公理和基本詞項的一切等价体系的問題。实质上这种考察的可能性表示該演繹理論的完善。在这种考察之后公理体系的选择就不是自发地产生的，而是有意識地产生的，从理論闡述所期望的性质产生的。（第 127 頁）

㊦㊩只有在那些可以应用演繹方法和仅仅局限于它們的科学中，演繹方法才可以看做是最完善的。（第 127 頁）

㊦㊪作者在这里企图用唯心主义的（因为它不是以符合实在的现实为前提）客观真理的定义（它要求遵守某些形式規則），来偷換以实践标准为基础的客观真理的概念。

形式化的真实意义是以此为基础的，即它提供了可能性来表达关于所考察的科学理論的命題的一切无穷集合的一般原理。例如，要檢驗这个理論的一切命題具有某种屬性 S ，只要证实下列这一点就足够了：理論的一切公理都具有这种屬性，推論的每一个可能的步驟把具有这种屬性的命題轉化为也具有这种屬性的命題。对于被考察的理論的公理体系來說不矛盾性和独立性的許多证明就是以类似的方式完成的。

因为命題的形成規則及变形規則（推論規則）同时帶有对一切有內容的解釋都是共同的、形式的性质，所以“形式化”这个術語是完全恰当的。（第 128 頁）

⑤⑨我們已經指出，在形式化的理論中，符号在某種意義上被看作是變項，而不是什麼也不表示的記号的結合；除此之外，我們要指出，沒有有內容的公理甚至不能建立完全形式化的理論：因為運用理論的符号的規則是有內容的。（第 128 頁）

⑥⑩關於這一點請參見注⑤⑨（§41 的注）。（第 129 頁）

⑥⑪上面塔爾斯基斷定：論證的方法論上的正確性恰好也是明確性和明顯性所需要的，這裡則相反地認為明確性和明顯性是損害“方法論上的正確性”的。（第 129 頁）

⑥⑫這裡塔爾斯基不是以他在 §36（參見注⑤⑨）中所定義意義——即不是以可證明性的意義——來理解真的。這裡他的真理觀比較正確。語句的真歸根到底總是由實踐的標準來證明的。（第 130 頁）

⑥⑬這裡問題不在於理論的理想性，而在于只有無矛盾的有內容的理論才能用演繹法來發展，因為在這種方法中必須利用形式邏輯的規律；只有在完全性的情況下，才能用演繹方法來發展全部理論。（第 131 頁）

⑥⑭塔爾斯基表明：可以建立不矛盾的理論，可是這種理論不能認為是真的。在這個理論中下列所有語句都能證明：

有一正整數 x 對於它來說 $Q(x)$ 是不正確的[這裡 $Q(x)$ 是某個固定的語句函項]。

$Q(1)$ ——是正確的。

$Q(2)$ ——是正確的。

.....

.....

$Q(n)$ ——是正確的。

.....

不能同时证明所有这些語句的演繹体系，称之为 ω -不矛盾的。(第131頁)

ⒺⒺ作者在这里沒有完全确切地描述事情。不是算术和几何不完全，而是所有包含算术(或高等几何)的相当大的部分的任何形式化理論都是不完全的，即不能把算术(和高等几何)完全形式化。(第132頁)

ⒺⒺ作者赋予“理論的”这个概念以不正确的意义(在这里及§40末)，认为不存在的事物具有任何理論意义(他在§40末說：在理論上能够使所有数学学科都具有形式化的形式，可是我們剛才已看到就連算术也不能形式化)。

不矛盾性和完全性問題具有重大的理論意义和实践意义。除了这一节之末所提到的关于这个問題的重要的研究之外，不矛盾性的相对证明在演繹理論的建立中占据重要的位置。在这些研究中，人們认为某种数学理論是不矛盾的，并且在这种条件下证明其他数学理論的不矛盾性(通常是借助于解釋)。例如，非欧几里德几何学(包括洛巴契夫斯基几何学)的不矛盾性是在欧几里德几何学不矛盾的假定下证明的。此外，对于算术來說至少在下述意义上也是能够证明不矛盾性的。如果对于每个自然数(数群)都可以能行地(即在实践上)檢驗其真的算术命題是可以证明的，則借助于整个自然数算术在它的这一部分上的解釋，可以证明算术的不矛盾性。这个結果是苏联数学家科尔莫戈洛夫在1925年获得的，然后又在1933年为哥德尔获得。不矛盾性在更为严格的意义上为干称和苏联数学家諾維科夫所证明。

某些数学家想看做某种数学理論可容許性标准的不矛盾性标准，不能与实践标准对立起来。它是实践标准在数学中的一种形式。比如，通常大多数不矛盾性的证明(絕對的和相对的)是建立

在模型的构造上的,即是建立在发现满足该理论的客体上的。(第 133 頁)

⑥⑦全部命题演算是在这一练习和以下几个练习中可以利用的推论规则。请读者注意记号 $\cup$ 和 $\cap$ (这表示运算,即把某些函项从与它们联系的客体中分出来)不同于记号 $\subset$ (这表示它所联系着的客体之间的关系,即在代入具体的客体之后 $K \subset L$ 表示真或假)。这种区别以此表现在公理中:即记号 $\subset$ 在公理中没有其他记号也可出现,而记号 $\cap$ 和 $\cup$ 只是与记号 $\subset$ 一起出现。(第 135 頁)

⑥⑧在检验了我们所研究的一切公理和定义是真语句之后,我们应当进一步借助于同样的真值表来检验我们的那些应用于真语句的推论规则,是否重新给出真语句(这是很容易做到的);因为一切定理都是借助于连续应用推论规则从公理得到的,所以它们也是真语句(参见注⑥⑨)。(第 145 頁)

⑥⑨这所以能发生,是因为如果公理体系是完全的,则任何能在所考察的理论范围内表述的语句,都能被证明或者被推翻。这就是说,在我们体系中不能被证明的那些语句的否定是可以证明的。因此,如果我们增加这种语句的话,则有些语句和它的否定都将在体系中。在这里所谈的完全性,通常称之为严格意义上的完全性。(第 146 頁)

俄譯本編輯部跋

塔尔斯基按其哲学观点來說接近于所謂“邏輯实证主义”(或“邏輯經驗主义”,如还有人这样称呼它的),而“邏輯实证主义”在最近二十年左右这个时期中曾在若干欧洲国家中广为傳播,現在則特別在美国被培植起来(其最著名的代表人物:在英国是維特根斯坦[L. Wittgenstein]和艾耶尔[A. Ayer],在美国是以卡尔納普为首的前“維也納学派”的成員和波兰亡命者柯雪勃斯基[A. Кожибский]和塔尔斯基。像罗素、怀特海和杜威[J. Dewey]这些馬赫派的哲学反动分子也接近于这一流派)。

自以为独創和新穎的“邏輯实证主义”,按其原則立場來說,只是馬赫主义的繼續,它企图利用数理邏輯的某些成就作投机,来弥补主观唯心主义的漏洞。“邏輯实证主义”的拥护者在作避免主观唯心主义必然要陷入的唯我論的絕望尝试时,使用了欺騙的手法,用邏輯上和数学上可論证性的标准(所謂“主观間的标准”)来偷換客观真理的标准。

这个流派把我們經驗的全部材料都归結为“感觉材料”(sense-data)的概念,想以此来克服唯物主义和唯心主义,这种虛妄而反动的意图也接近于馬赫主义。据說“感觉材料”既以“語句”或“命題”的形式表述出来,就成了“科学的原料”。两个基本哲学流派是这样“克服”的:它們之間的斗争被宣称为是“假問題”,据說是沒有任何实在意义和作用的,因为这种“假問題”的产生似乎与历史要求和社会問題沒有任何联系,而只是一种我們日常語言不完善的結果。“科学經驗主义”(有人还这样称呼这派人)的拥护者,力图

在唯物主义和唯心主义圍繞着进行越来越尖銳斗争的哲学的基本問題上使讀者糊塗，企图用語言學的問題来偷換哲学問題。唯物主义和唯心主义的“克服”，实际上原来是最平常的主观唯心主义。列宁当时关于馬赫主义者所說的一切話，完完全全适用于整个地站在巴克萊和休姆主观唯心主义基地上的“邏輯实证主义者”。关于这样的学者列宁曾經写道：他們在專門領域內能作出最有价值的工作，但是“一旦談到哲学問題的时候，……任何一句話都不可相信。”^①

至于我們对本书的專門意見和补充，則可以归結如下。

1. 在塔尔斯基的书中有許多傳記和文献目录的历史性的附注。塔尔斯基在举出某位著者时，从不忘記指出他的国籍，但这却不是始終正确的。比如，十九世紀前半叶著名的捷克哲学家和数学家波察諾，他把他列入德国人之內（見第 103 頁）。奥地利政府曾禁止波察諾作任何公开的演說，于是他的那些包含着超过魏尔施特拉斯（K. Weierstrass）和康脫相应的发现三十多年的許多結果和思想的数学著作，只是在他逝世之后才能問世；——一些最基本的著作差不多在写成以后过了一百年才問世。

在这里編輯部对于下列这个情况也不能置若罔聞：塔尔斯基对于英国的、美国的、德国的和同他接近的波兰的邏輯学家和数学家在书中非常乐于（常常不只一次）提及，而对于俄国学者的著作則只字不提。

2. 在从事数理邏輯方面工作的苏联学者特別注意于能够直接作数学或技术应用的那些問題。站在辯证唯物主义立場上的苏联学者所研究的真正的邏輯問題所以有意义，首先是因为这些問題

^① 《列宁全集》第 14 卷，1957 年，人民出版社，第 362 頁。

駁斥了实证主义、形式主义、直觉主义与許多其他流派和色彩的現代越来越反动的唯心主义的立場。

3. 上世紀八十年代俄国有才能的天文观察家和喀山大学讲师柏拉頓·謝尔盖耶維奇·波列茨基 (Платон Сергеевич Порецкий 1846—1907) 在类演算(他首先把它作为邏輯推理理論来考察)方面, 获得了非常出色的成果。

波列茨基与从事数理邏輯方面工作的其他先驅者(布尔、耶方斯[W. S. Jevons]、习玉德、皮尔斯)不同, 他不夸張他所研究的問題的邏輯意义。波列茨基在他的巨著^①《論解邏輯等式的諸方法及数理邏輯的轉換方法》(其中包含着 1882 年 2 月 27 日和 3 月 23 日在喀山大学所屬自然科学者协会数理部會議上宣讀的两个通报)中写道:

“三个运算的体系(相当于塔尔斯基书中所考察的以 $\cup$, $\cap$, 等記号标示的类的运算。——編者注), 对于构成完全的质推理(波列茨基所謂的质是指具有一个主目变項的語句函項。——編者注)是完全足够了, 它向我們表明: 以这三个运算为基础的对于质的形式的思維, 甚至沒有包括代数思維, 更不用說一般的数学思維了……因此, 如果邏輯思維的一切过程确实建立在质推理理論的原理上, 則必然将承认邏輯思維不仅不是一般的, 而且相反地, 是极其專門的, 并且又是非常基本的, 因为它只有与那些相当于代数的基本方面的量的思維的初步才能比較”(第 XXI 頁)。

但同时波列茨基清楚地意識到了这个体系在数理邏輯历史中所占的地位的重要性。他曾写道: “我們来看現在提請讀者审查的

① 波列茨基写了 15 部以上数理邏輯方面的著作, 大部分都发表于喀山大学所屬的各种数理学会的刊物上。

著作時，我們應該說：(1)它包含着構成完全的並且完全成功的質推理理論的第一個試驗（不僅在我國文獻中並且也在外國文獻中）；(2)它是（除了闡述其他作者的方法的不多幾頁以外）完全獨立的著作，這部著作所以具有更為重大的意義，是因為這個理論的最一般的公式和方法，只有我們才最早獲得。這個理論的整個部分（從推理到前提），無論就方法來說還是就可能解決這一課題的思想本身來說，都完全独一无二地屬於我們”（第 XXIII—XXIV 頁）。

波列茨基這個估計的不錯，從下面這一點即可看出：雖然他的基本著作是用俄文寫成的，並且刊載在不易得到的刊物上，但是外國的同道們都據此學習。例如，古杜拉（L. Couturat）在其名著《邏輯代數學》中敘述波列茨基的方法，是在邏輯代數學的整個發展中當時所能達到的（古杜拉的书于 1905 年間世）最完善的階段。

4. 莫斯科大學教授伊凡·伊凡諾維奇·日加爾金（Иван Иванович Жегалкин 1869—1947）關於數理邏輯的最初三部著作^①，是在主題方面最接近於波列茨基的著作的。這些寫得非常平易淺近的著作，一定能夠理解塔爾斯基這本書的讀者所領會。

我們要指出：日加爾金是第一個建立下列這種形式的語句演算的人：用現代代數的語言來說即與模 2 的剩餘環同構的代數環；換句話說，他建立了一種語句邏輯，類似只有 0 和 1（任何整數除以 2 所得的余數）兩個數的算術，這種算術只有兩種運算：加和乘，這種運算不同於通常的只是 $1+1=0$ （兩個奇數的和是偶數）。如果我們編制一張這種“2 數算術”的加法表和乘法表的話，則我們

① 日加爾金：《論符號邏輯命題計算的技術》，載《數學論文集》第 34 卷，第 1 冊，1927 年；《符號邏輯的算術化》，I. 載《數學論文集》第 35 卷，第 3—4 冊，1928 年；II. 同上，第 36 卷，第 3—4 冊，1929 年。

得到:

p	q	$p+q$	p	q	$p \cdot q$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0

現在我們把“1”解釋作真的記号,“0”作为假的記号,于是我們的表就将获得如下的形式:

p	q	$p+q$	p	q	$p \cdot q$
u	u	$\wedge$	u	u	u
u	$\wedge$	u	u	$\wedge$	$\wedge$
$\wedge$	u	u	$\wedge$	u	$\wedge$
$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$ ①

显然,其中第二个相当于邏輯联詞“和”,第一个則相当于严格的不可兼的“或者”(“或者——或者”),即“或者 p , 或者 q ”形式的語句,只有在两个語句 p, q 中的一个,并且只是一个是真的时候,这个語句才是真的。此外,如果我們把記号“0”和“1”引入我們的演算本身之中,則語句邏輯的其余运算就不难还原为这两个运算,即加和乘。比如, p 的否定以 $p+1$ 的形式来表現。确实,否定由下表規定:

① “ u ”代表“真”,“ $\wedge$ ”代表“假”。——譯者注

p	$\sim p$	或者	p	$\sim p$
u	λ		1	0
λ	u		0	1

而对于 $p+1$, 我們在“2 数算术”中有:

p	$p+1$
1	$1+1=0$
0	$0+1=1$

即恰恰与上表一样。因此, 語句邏輯完全轉变为“2 数算术”。“2 数算术”的規律久已研究出, 因此可以直接引用于演算复杂語句的技术中去。

不久以前, 1946 年, 在《巴黎科学院报告》中发表了拉兰 (Lalan) 的注記, 他在其中提出了按照日加尔金的方法, 把語句演算构成代数环, 但完全不提日加尔金的著作^①。

日加尔金根据其語句(命題)演算进一步建立起謂詞(用塔爾斯基的術語是“語句函項”)演算, 并且非常簡單漂亮地为只包含一位語句函項的公式, 即为类的邏輯(并且不論是一次的还是二次的)(見本書第 71 頁), 解决了判定問題(見本書第 130—131 頁)。日加尔金的其他著作都是論述一定种类的公式的更要复杂得多的情况的。他能为此解决(任何有穷域)我們現在知道在一般情况下^②不能解决的判定問題。

5. 与物理学的危机一起开始的帝国主义时代自然科学的危机, 很快就扩大到数学基础方面, 早在战后(二十年代)年代, 在那

① 評介拉兰注記的車尔赤注意到这一点。

② 參見本書第 132 頁。

里就已达到非常剧烈的程度。与数学的集合論的論证,特别是应用排中律于涉及无穷的对象域的存在判断有关的一些困难,使直觉主义者伯劳威尔(L. E. J. Brouwer)和維尔(H. Weyl)得出一个結論:看来好像已为魏尔施特拉斯、康脫和戴德鏗的工作已最后稳妥地論证了的数学分析的大厦,却建立在沙滩上。他們所提出的出路,就中要求从数学中排除一切非构造性的存在命題,即不是建立在能行地构造对象的基础上,而对象的存在却是确定了命題。但是他們所提出的这种出路意味着加在数学上的如此严酷的限制,以及像伯劳威尔和維尔等这些学者的唯心主义哲学观点同其数学創造之間的如此无出路的矛盾是必然的,以致确实使他們只有宣告数学基础的毫无出路的危机。反对直觉主义者的有名的数学家希尔伯特企图在形式主义的道路上找寻摆脱困难的出路,即打算依靠使数学的命題丧失内容意义并把这门科学变为独特的公式游戏来寻找摆脱困难的出路。

早在1925年,苏联数学家科尔莫戈洛夫(A. Н. Колмогоров)就发表了《論 tertium non datur 原則》^①这一著作,勇敢而尖銳地反对非常有威信的数学家所持有的形式主义以及直觉主义。这一著作的基本思想在于指出一种方法,能够把古典数学的命題表現在与它們相当的“直觉主义的”命題中,同时并不破坏证明的联系,即把古典地证明了的命題,变成“直觉主义地”证明了的命題(=在可疑的場合不使用排中律)。这样,在唯物主义的处理下,就不为数学基础的危机留下任何余地了。因为我們既承认了經過論证的“直觉主义的”(构造的)数学,就必然要承认也經過論证的古典的数学(只要我們不武断地硬加上主观唯心主义的直觉主义的真理

^① 《論排中律》《数学論文集》,第32卷,第646—667頁(1924—1925)。

标准即可)。我們要指出, 科尔莫戈洛夫的著作早七年就得出了哥德尔的有名的結果。哥德尔借助于类似的方法表明: “直觉主义的算术和数論只是較古典的算术和数論清楚一些, 而在实际上則包含着整个古典的算术和数論, 只是解釋稍有不同。”

哥德尔的另一个有名的結果 (1932 年) 在于: 拋棄排中律的“直觉主义的”命題邏輯不等价于用真值表所构成的, 容許不同“状态”(真值) 的有穷数的語句邏輯, 哥德尔的这个結果为苏联数学家格里聞科(Гливенко, В. И.) 預見到了。他还在 1928 年就机智地指出了伯劳威尔的邏輯与假設(除了真和假以外) 某种“第三种”状态是不相容的。1929 年格里聞科除此外还证明了: 古典語句邏輯中命題 p 是可以证明的, 則在“直觉主义”邏輯中 p 的双重否定 $[\sim(\sim p)]$ 也是可以证明的。如果 $\sim p$ 可以古典地证明, 則它也可以“直觉主义地”证明。

我們在談到“直觉主义”邏輯时, 有意識地把这一名詞放在引号里。問題在于直觉主义者同意新康德派的馬赫主义主观唯心主义的观点。从这一馬赫主义主观唯心主义的立場来看, 确实沒有摆脫他們所宣告的数学基础危机的出路。关于数学中在沒有根据地使用排中律的場合下产生的困难問題, 使苏联科学家从根本不同的观点感到兴趣。科尔莫戈洛夫的著作(1932 年) 包含着把“直觉主义的”邏輯解釋为“問題演算”, 其中具有摆脫了直觉主义的認識論前提的对于“构造”邏輯的内容意义的唯物主义解釋。

6. 关于演繹理論不矛盾性的問題, 塔尔斯基提到哥德尔的有名結果, 这个結果对算术不矛盾性的直接(构造)证明的可能性一般地置疑。可是苏联数学家諾維科夫提出了按思想來說非常簡單且聪明的算术不矛盾性的证明。这个证明的基础是諾維科夫所建立的邏輯演算, 这种演算除了語句邏輯的运算外, 还假定无穷的

(可数的)邏輯和及邏輯积。①

如果这里所談的对象域是可数的(參見注③④),則这个域的一切对象都具有屬性 S 这个判断,就可以用以下这些判断的无穷积来代替:“对象 a_1 具有屬性 S , 对象 a_2 也具有屬性 S , ……”, 对象 a_n 也具有屬性 S ……”;而“存在着具有屬性 S 的对象”这个判断,則为以下这些判断的无穷和所代替:“对象 a_1 具有屬性 S , 或者对象 a_2 具有屬性 S , ……”, 或者对象 a_n 具有屬性 S , 或者……”。諾維科夫在假定只把能应用于无穷和“直觉主义”数学的那些推論工具应用于这些“和”和“积”之后,他就表明,在他的演算中,属于这个演算的公式“ A ”是不能证明的。(如果“ A ”是可以证明的,則按代替規則从其中可以引出任何公式,——特別是 B 和 $\sim B$ 两个公式,其中一个是另一个的否定,即演算是矛盾的。反之,如果諾維科夫的演算是矛盾的,則其中可以证明任何公式,包括“ A ”在內。)

在这里特別出色的是諾維科夫所获得的不矛盾性证明,已經不仅仅包含邏輯意义,而且包含着直接的数学意义。即,如果我們有一个算术的語句函項 $F(x)$, 它对于任何整数 x 的真或假,能用有穷次运算来檢驗,如果我們能够一般地证明存在数 n , 对于 n 來說, $F(n)$ 是真命題,則从此“純粹的”存在证明中,照諾維科夫所提出的方法,我們就能求得数 n 的能行的計算方法;就可以說能够把可能性的证明变为使可能性轉变成现实的方法。②

7. 我們在序言中已經指出,恰巧是那些学者們圍繞着进行具有原則性的尖銳斗争的数理邏輯和数学证明論的最有意思、爭論

① 《苏联科学院报告》第 XXIII 卷第 5 期, 1939 年,《数学論文集》第 12 卷(德第 54 卷)第 2 期, 1943 年,第 231—261 頁。

② 想較詳細地了解諾維科夫的計算的讀者,也可以參讀波茨瓦爾的著作《論一種計算邏輯和和邏輯积的比例演算》[載《数学論文集》第 7 卷(德第 49 卷),第 1 期, 1940 年,第 65—100 頁],其中包含着諾維科夫体系的全部证明。

最多的問題，在塔尔斯基的书中却簡單地迴避了。就中包括数理邏輯的諄論和与此有关的罗素的邏輯类型論問題，实际上這些問題塔尔斯基仅限于指出它們“屬於現代邏輯的最复杂的問題”（第71頁）。

其实這些問題苏联学者波茨瓦尔和諾維科夫^①已成功地找到了一种掌握塔尔斯基这本书的基本材料的讀者完全能够懂得的簡單且令人信服的解法。在我們看来，这个解法甚至在初等教科书中也特別值得詳細地闡述，因为这是一个昭然若揭的例子证明掌握唯物主义辯证法的原理对于形式邏輯方面的工作也是多么重要，反之，主观唯心主义的形而上学，当一旦涉及到較為精細的邏輯問題（比如，关于与這些問題相联系的对象域的改变）时，又如何不可避免地吧研究者引入死胡同。

8. 俄国学者辛芬开尔（М. И. Шейнфинкель, 1887—1942）的著作在数理邏輯的发展史中起着重要作用。他是敖德薩的天才数学家夏图諾夫斯基（С. О. Шатуновский, 1859—1929）的学生。夏图諾夫斯基也发表了許多有关邏輯和数学的邏輯論证的重要且

① 波茨瓦尔：《論数理邏輯的諄論和集合論》，載《数学論文集》第15卷（德第57卷）第3期，1944年，第369—384頁。这部著作以下列這些話开始：“本文是以某种就作者所知到現在为止在已发表的与此問題有关的基本論著中尚未应用过的新观点来研究設有类型論的扩充的函項計算和所謂数理邏輯的諄論的。这种新观点非常簡單、明了而自然，同时以完全新的观点来提出整个諄論問題”。

又參見：

波茨瓦尔：《关于正常集合和謂詞的某些邏輯定理》，載《数学論文集》第16卷（德第58卷）第3期，1945年。

波茨瓦尔：《論一种三值計算及其应用于分析古典扩充函項計算的諄論》，載《数学論文集》第4卷（德第46卷），第2期，1938年。

波茨瓦尔：《关于一种三值計算不矛盾性問題》，載《数学論文集》第12卷（德第54卷），第3期，1943年。

諾維科夫：《論邏輯諄論》，載《苏联科学院报告》，1947年第LVI卷，第5期。

獨創的思想^①。

辛芬开尔在发表了以新方式闡明对数学家來說是基本的函数概念和开辟构造邏輯演算的新道路的深刻研究之后,很遺憾,因重病很早就离开了行列。辛芬开尔在1924年根据还在1920年所作的报告而发表的著作《論建筑数理邏輯大厦的磚石》,在美国邏輯学家和数学家凱立(H. B. Curry)和車尔赤的組合演算和 λ -变换演算中被广为利用。(凱立的組合演算思想和車尔赤的“S-組合”思想直接来自辛芬开尔;車尔赤的 λ -变换演算一般地是辛芬开尔关于函数的思想体系的形式化。)由于車尔赤关于判定問題的不可解的有名結果^②正是他为了上升到辛芬开尔的組合論而获得的,所以他觉得是能够利用来获得直接的数学結果的。比如,苏联数学家馬尔科夫(A. A. Марков)就是以这种方式构成了一系列組合体系理論中的課題,而对于組合体系來說是不存在算法論的解法的^③。

9. 苏联数学家馬尔采夫(A. И. Мальцев)的著作《論一种获得群論局部定理的一般方法》^④,是論述数理邏輯的定理之一的直接的数学应用的。

递归函数論是現代数理邏輯的一章,递归函数論表明了它同解析集合論的联系,而递归函数論中的一系列結果是由諾維科夫和他所領導的討論班的参加者获得的。

10. 应用数理邏輯的工具于电工技术問題(与构造继电器接点图式有关)的优先权是屬於年輕的苏联物理学家謝斯塔科夫(B. И.

① 參見契波塔里娃关于夏图諾夫斯基的論文,載《数学进展》,1940年第VII期,第314—321頁。

② 參見本书§41。

③ 《苏联科学院报告》,第LV卷,第7期及第LVIII卷第3期,1947年。

④ 《国立伊凡諾夫教育学院学报》,第1卷第1期,1941年。

Шестаков) 的。謝斯塔科夫的著作^①早在 1935 年 1 月就已写好, 可是遺憾的是沒有及时发表, 虽然这部著作是他的候补博士学位論文的基础。苏联工程师加武里洛夫(Гаврилов, М. А.)为了解較复杂的继电器接点图式(其中除了包含串联的和并联的以外, 还包含所謂“桥式”的)結構的符号观念的課題, 构造了專門的演算^②。

11. 我們对于苏联学者关于数理邏輯及其应用的著作可以繼續大量評述。但是我們觉得所引证的已經足够证实两个基本論点:

(1) 数理邏輯之所以使苏联学者感到兴趣, 首先是作为数学的一部分, 作为新的数学分支, 这种分支具有專門的工具和据有能够直接应用于数学和技术的结果和方法。

(2) 先进的苏联学者在其关于数理邏輯的著作中, 不持虛伪的科学“无党派性”的立場, 而塔尔斯基則是以“无党派性”的名义來說話的, 实际上这是意味着为帝国主义反动派、煩瑣哲学和僧侶主义的目的服务的。我国学者持最先进的革命哲学即唯一能與我們时代的真正科学相容的哲学——辯证唯物主义哲学——的观点, 并准备在所有一切战綫上, 包括与数理邏輯及数学的邏輯基础有关的問題方面, 同反动势力宣战。

① 《继电器接点图式代数学》。在謝斯塔科夫的著作中, 我們可以指出: 《完全从两极构成的两极图式代数学 (A-图式代数学)》, 《技术物理杂志》, 第 XI 卷第 6 期, 1941 年; 《利用继电器接点图式实现的表达式的命題的特征函項的观念》, 苏联科学院出版社, 《数学丛刊》第 10 期, 1946 年, 第 529—552 頁。

② 加武里洛夫的第一部著作《具有活門元件的继电器接点图式》发表于苏联科学院出版社出版的《技术丛刊》1945 年第 153—164 頁。

索引

这个索引包含着在这本书中用于专门意义的最重要的詞項和表达式以及正文中所列举的一些科学家的名字。跟在一个詞項后面的方括弧包含着在本书中用作与該詞項同义的一些表达式。

所有的数字都指明頁碼。粗体数字指明主要的詞項和最重要的頁碼。

— 画

—(One), 61—62, **77—78**, 200

——对应(One-to-one correspondence)〔以——对应的方式把…映射在…(—mapping)〕, 参見: 确立一个序列

——关系(One-one relation), 参見: 一—函項

——函項(Biunique function)〔——关系(one-one relation)〕, **100, 102**

二个方程式的根 (Root of an equation), **4, 27**

一个公理系統的實現 (Realization of an axiom system), 一种演繹理論的實現 (——a deductive theory), 参見: 一个公理系統的模式

一个公理系統的模式〔實現〕, (Model [realization] of an axiom system), 一种演繹的理論的模式 (—of a deductive theory), **116, 118—123, 184**

一个关系的前趋 (Predecessor with respect to a relation), **85, 96**

一个关系的后域 (Converse-domain [Counter-domain] of a relation),

85

一个关系的后继 (Successor with respect to a relation), **85, 96**

一个关系的否定关系〔余关系〕 (Negation [Complement] of a relation), **88, 111**; 一个語句的否定式 (— of a sentence), **16, 184**

一个关系的逆关系(逆关系) (Converse of a relation [—relation]), **90, 111**; 一个語句的逆語句〔逆語句〕 (— of a sentence [— sentence]), **29, 42—44, 167**

一个运算的結果 (Result of an operation), **105, 160**

一个运算的右的单位元素 (Right-hand unit element of an operation), **205**

一个运算的左的单位元素 (Left-hand unit element of an operation), **205**

一个命題的推导 (演繹) (Derivation [deduction] of a statement), **114**

一个函項的值 (Value of a function), 参見: 函項值; 一个变項的值 (— a variable), **4**; 应变項的值 (— the dependent variable), 自变項的值

(— — —independent variable),
97, 又参見: 函項值, 主目值
 一个函項的相应值 (Corresponding value of a function), **96, 100**
 一个析取式的可兼的意义 (Non-exclusive meaning of a disjunction), **18**
 一个类的势 (Power of a class), 参見: 一个类的基数
 一个类的元素 (Member of a class), 参見: 元素; 合取式的元素 (— of a conjunction) (邏輯积的因子), **17**; 析取式的元素 (— — a disjunction) (邏輯和的被加項), **17—18**
 一个类的基数 (元素的数, 权) (Cardinal number (number of elements, power)), **66, 76—77, 102**
 一个相应的函項值 (給函項指定一个值) (Correlate [assign] a value of a function), **96, 100, 105**
 一个眞值表的行 (Column of a truth table), **38—39, 140**
 一个符号的外形 (Form of a sign), **109**
 一个蘊函式的前件 (假設) (Antecedent [hypothesis] of an implication), **20—22, 24—26, 28—29, 42, 45, 46**
 一个蘊函式的后件 (結論) (Consequent [conclusion] of an implication), **26—28, 42, 46, 167**
 一个蘊函式的結論 (Conclusion of an implication), 一个定理的結論 (Conclusion of a theorem), **26—28**; 又参見: 后件
 一个蘊函式的假設 (Hypothesis of an implication), 一个定理的假設 (— — a theorem), **26—27, 28**; 又参見: 一个蘊函式的前件

一元运算 (Unary operation), **105**
 一多关系 (One-many relation), 参見: 函項
 一条綫段的长度 (Length of a segment), **92, 101**
 一种公理系統的解釋 (Interpretation of an axiom system), 一种演繹的理論的解釋 (— — a deductive theory), **116, 119—120, 183—184, 194—195, 199**
 一致的 (无矛盾的) 公理系統 (Consistent [non-contradictory] axiom system), 一致的 (无矛盾的) 演繹理論 (Consistent [non-contradictory] deductive theory), **129—132, 192—193, 199**
 一般集合論 (General theory of sets), **65—69, 102—103**

二 画

几何 (Geometry), **60, 67, 115—116, 125, 132**
 几何图形 (Geometrical configuration) (图形 (— figure), 点的集合 (point set)), **60, 65, 67, 125, 132** 几何的相等 (— equality) (几何图形的相等 (equality of-figures)), **60, 93—94**
 二元运算 (Binary operation), **105**; 二元关系 (— relation), 参見: 兩項关系
 二值函項 (Two-valued function), **99**

三 画

小于 (小于这个关系) (Less than [relation of being smaller]), **94, 147—149, 155, 162, 187, 201**, 小于或等于 (至多等于) (— or equal to [at most equal]), **30, 154**

大于〔大于这个关系〕(Greater than (relation of being greater)), 94, 147—148, 162

个体(Individual), 65, 70, 85

子类(Subclass), 72

三分(Trichotomy), 参見: 三分律

三段論(Syllogism), 参見: 三段論定律
中的Barbara式, 直言三段論定律, 假
言三段論定律

三項关系(Three-termed (ternary) relations), 三項函項关系(—functional relations), 103—105, 173

习玉德(E. Schröder), 85, 135

四 画

不(not), 16—18, 36

不等式(Inequality), 27, 84, 168; 在狭义的意义上的不等式(Inequalities in the narrower sense), 在广义的意义上的不等式(Inequalities in the wider sense), 157

“不齐”的类(“Inhomogeneous” class), 71

不可兼的类(Exclusive classes), 参見:
不相交的类; 析取式的不可兼的意义
(—meaning of a disjunction), 18

不可兼的类(Mutually exclusive classes), 参見: 不相交的类; 彼此独立的公理(—independent axioms), 参見:
独立的公理系統; 互相独立的基本詞項(—primitive terms), 参見: 互相独立的基本詞項的系統

不对称的关系(Asymmetrical relation), 91, 95, 111, 149, 153

不傳遞的关系(Intransitive relation), 108

不自反的关系(Irreflexive relation),

91, 94—95, 111, 158

不同形的表达式(Non-equipform expressions), 不同形的符号(—signs), 109

不完全的公理系統(Incomplete axiom system), 不完全的演繹理論(—deductive theory), 130—131, 195

未定义的詞項(Undefined term), 参見: 基本詞項

不相同(不是同一的)(Different from (not identical with)), 52

不相交的(不可兼的)类(Disjoint (mutually exclusive) classes), 72—73, 81, 138

引号(Quotation marks), 55, 57—58, 63—64

无穷(Infinity), 参見: 无穷公理

无穷类(Infinite class), 76—78, 102

无穷倒退(—regress)(regressus in infinitum), 114, 127

无理数(Irrational number), 1, 79, 194, 202, 208

无矛盾的公理系統(Non-contradictory axiom system), 无矛盾的演繹理論(—deductive theory), 参見: 一致的公理系統

元素(Element(s)), 参見: 运算的单位
元素; 一个类的元素(—[member (s)] of a class), 66, 67, 69—72

元邏輯与元数学(Meta-logic and meta-mathematics), 134

公式(Formula), 3

公設(Postulate), 114; 又参見: 方法論的公設

公理〔基本命題〕(Axiom(s) [primitive statement(s)]), 113—115;

連續性公理〔戴德鏗公理, 連續性定

律) (— of continuity, (Dedekind's —, law of continuity)), 202, 206; 无穷公理 (— of infinity), 79, 125, 213; 公理系統 (— system (system of axioms)), 117, 119—120, 131—132, 138, 146, 151, 180, 182—192, 199—201, 203—211
 公理的系统(System(s) of axioms), 参见: 公理系統; 彼此独立的公理系統 (— mutually independent axioms), 参见: 独立的公理系統; 互相独立的基本詞項的系統 (— primitive terms), 参见: 独立的基本詞項的系統; 詞項的系統 (— terms), 基本詞項的系統 (— primitive terms) 126, 192, 198; 語句系統 (— sentences), 1, 126, 184
 公理的选择(Selection of axioms), 125, 180; 基本詞項的选择 (— primitive terms), 125, 180
 分析(Analysis), 79
 分离(Detachment), 参见: 分离規則
 分数(Fraction), 1, 79
 分配律(Distributive law(s)) (在算术中), 206; 分配律(在語句演算中), 50; 分配律(在类的理論中) 82; 分配运算(— operation), 206
 分隔两个数的集合 (Separate two sets of numbers), 202
 方法(Method(s)), 113, 127, 132; 构造語句演算的方法 (— of constructing sentential calculus), 140—141; 方程式方法 (— of equations), 11; 凭借解釋的证明方法 (— of proof by interpretation) (展示模型的证明方法 (— exhibiting a model)), 121, 183—184, 187, 199; 眞值表的方

法 (— of truth tables (— matrices)), 35, 37—41; 140, 145
 方法論的概念 (Methodological concept), 方法論的詞項 (— term), 133—134; 方法論的定律 (— law) 122—123, 199; 方法論的公設 (— postulate), 方法論的原則 (— principle), 123, 127, 185
 反語句 (Inverse of a sentence (Inverse sentence)), 42—44, 167; 反运算 (— an operation), 170—171
 双重否定 (Double negation), 参见: 双重否定定律
 日常語言 (Everyday (common, ordinary) language), 8, 16, 18—19, 21, 23—25, 28, 57, 155

五 画

布尔(G Boole), 16, 66
 主目 (Argument), 参见: 有一个, 两个...变項的函項; 主目值(自变項值), 96, 97, 100—101
 半綫(Half-line), 101
 对应(Correspondence), 参见: 建立一个——对应
 对于任何 (For any) (对于任意 (for arbitrary), 对于每一 (for every)), 5, 6, 13, 34—35, 40, 148
 对称的关系 (Symmetrical relation), 91—92, 111, 118
 矛盾(Contradiction), 参见: 矛盾律
 矛盾的語句 (Contradictory sentences), 16, 129—130
 矛盾的公理系統 (Inconsistent axiom system), 矛盾的演繹理論 (— deductive theory), 130, 146
 正数 (Positive number), 1, 67, 101—

102, 194, 203
 代数(Algebra), 1, 27, 79, 97
 代数方程式 (Algebraic equation), 1, 4; 代数式 (—expression), 4; 代数和 (—sum), 174; 代数分式 (—fraction), 27
 代数表达式的变换 (Transformation of an algebraic expression) 162,
 皮尔斯 (Ch. Peirce), 12, 35, 84, 103
 未知数(Unknown), 4
 旧逻辑 (Old logic), 参见: 传统逻辑
 弗莱格(G. Frege) 16, 79, 128, 141
 兰福德(C. H. Langford), 参见: 路易士与兰福德
 归谬法 (Reductio ad absurdum), 参见: 间接证明, 归谬律
 卡尔纳普(R. Carnap), 213—214
 叫作部分(Comprehend as a part)(叫作真正子类(Comprehend as a proper subclass), (叫作子类(Comprehend as a subclass)), 72
 必要条件 (Necessary condition), 26; 必要而且充分的条件 (—and sufficient condition), 30
 四项关系 (Four-termed relation), 四项函项关系(—functional relation), 103—104
 可反的运算 (Invertible operation), 160; 205—206
 可行的运算(Performable operations) 160, 182
 左反运算 (Left inverse of an operation), 171
 左分配的运算 (Left-distributive operation), 206
 左可反的运算 (Left-invertible opera-

tion), 160
 左单调运算 (Left-monotonic operation), 162
 右反运算 (Right inverse of an operation), 171; 等式的右方 (—side of an equation); 不等式的右方 (—inequality), 157; 等值式的右方 (—equivalence), 29
 右分配运算 (Right-distributive operation), 206
 右可反运算 (Right-invertible operation), 160, 182
 右单调运算 (Right-monotonic operation), 162
 包含…作为一个元素 (Contain as an element[—a member]), 66
 由所有数构成的集合, 使得 (Set of all numbers such that), 67—69
 以一一对应的方式把…映射在… (Map in a one-to-one manner), 参见: 确立一个序列

六 画

字(Word), 56—57, 110
 有(There is), (—are) (—exists) 6—10; 最少, 最多, 恰恰有一个 (—at least, at most, exactly, one), 最少, 最多, 恰恰有两个 (—at least, at most, exactly, two), 27, 61—62, 77—78, 173
 有(For some), 6
 有穷类 (Finite class), 76—79, 102
 有序交换群(Ordered Abelian group), 185, 187, 196, 203; 排成一个序列的类 (—class), 94, 197, 202; 有序域 (—field), 205
 同一(等于, 相同) (Identical with (eq-

- ual to, the same as)), 51—52, 54, 55
- 同一 (邏輯的同一) (Identity (logical —)), 51—53, 55, 69, 84, 89, 92, 95 97—98; 类的同一 (—of classes), 性质的同一 (—of properties), 72, 92, 96; 关系的同一 (—of relations), 89, 92,
- 同义的 (Synonymous), 92
- 同形的表达式 (Equiform expressions), 同形的符号 (—signs), 109
- 自反 (Reflexivity), 参見: 自反定律
- 自反的关系 (Reflexive relation), 90—92, 111, 118
- 自然数 (Natural number), 77—78, 102, 200
- “自变項” (“Independent variable”), 97
- 自由 (真) 变項 (Free (real) variable), 9—10, 13, 66—69, 84, 86, 110
- 而且 (And), 16, 17, 33, 36
- 合成 (Composition), 参見: 合成律; 关系的合成 (Composition of relations), 参見: 相对积
- 合取式 (Conjunction), 参見: 語句联詞; 語句的合取式 (邏輯积) (— (logical product) of sentences), 17, 47
- 任何 (Any), 参見: 对于任何
- 任意 (Arbitrary), 参見: 对于任何
- 关系 (Relation(s)), 84—100, 106—108, 110—112, 118—119, 133, 158, 162—163, 187, 197, 201—202; 类与类間的关系 (Relation among classes), 参見: 类与类間的基本关系; 数之間的关系 (—of numbers), 153; 大于这个关系 (—of being greater), 小于这个关系 (—of being smaller), 参見: 大于, 小于; 第一級, 第二級…关系 (—of the first, second, …order), 85
- 关系的前域 (Domain of a relation), 85
- 关系的相对积 (关系的合成) (Relative product of (composition of) relations), 89, 99, 159; 关系的相对和 (Relative sum of relations), 90
- 关系的绝对积 (Absolute product of relations), 89
- 全类 (Universal class), 70, 73, 76, 85, 91, 161; 全称量詞 (—quantifier), 7 10, 35, 40, 45, 61, 62; 全关系 (—relation), 87; 全称語句 (—sentence) [具有普遍性质的語句 (Sentence of a universal character)], 5, 7
- 全等的几何图形 (Congruent geometrical figures), 60, 92, 116—117, 118
- 名称 (Name), 56—57, 63—64, 134
- 交换 (Commutation), 参見: 交换律
- 交换域 (Commutative field), 206; 交换律 (在算术中) (Commutative law) 5, 161—162, 206; 交换律 (在語句演算中), 41; 交换律 (在类的理論中), 75; 交换运算 (Commutative operation), 160, 171, 182, 205—206
- 伐拉第 (G. Vailati), 150
- 多項式 (Polynomial), 27
- 多項关系 (Many-termed relation), 多項函項关系 (—functional relation), 103—104, 105
- 多值函項 (Many-valued function), 99
- 多余的公理 (Superfluous axioms), 127, 180, 182; 多余的基本詞項 (—primitive terms), 127, 185
- 至多等于 (At most equal), 参見: 小于

或等于

存在量詞 (existential quantifier), 7

61, 62; 存在語句 (絕對的存在語句, 具有存在性质的語句) (—sentence (absolutely—, Sentence of an—character)), 6—7

在…情形下 (In case that), 33

在…前的理論 (Preceding theory) (在…前的学科 (—discipline), 作为前提的理論 (presupposed theory)), 115, 124, 132, 146; 先于数的集合 (—set of numbers), 202; 詞典序列的在前的字 (—word in lexicographical order), 110

华沙中心 (Warsaw center), 134

如果…, 那么 (If…, then), 16, 20—26, 33, 36

如果, 而且仅仅如果 (当且仅当) (If, and only if), 29—31, 36

共軛語句 (Conjugate sentences), 42, 44, 50

約束 (假) 變項 (Bound (apparent) variable), 10—11, 13, 68

傳遞关系 (Transitive relation), 91—95, 111, 118, 149, 158

傳統 (亚里士多德的, 旧的) 邏輯 (Traditional (Aristotelian, old) logic), xxii, 15, 74

导出眞值表 (Derivative truth table), 38, 140

亚里士多德 (Aristotle), 16

亚里士多德的邏輯 (Aristotelian logic), 参見: 傳統邏輯

后件, 結論, 推論 (Consequence), 26—28, 133, 184

列斯尼夫斯基 (S. Lesniewski), 128, 134

七 画

李 (S. Lie), 161

两 (Two), 61

兩項 (二元) 关系 (Two-termed (binary) relation), 兩項函項关系 (—functional relation), 103—104, 105

兩重余类 (Double complement), 参見: 兩重余类定律

每一 (Every), 8, 74; 又参見: 对于任何条件 (Condition), 3, 26

条件語句 (Conditional sentence), 参見: 蘊函式

条件的存在語句 (Conditionally existential sentences), 7

序列 (Order), 参見: 确立一个序列, 数的次序的定律; 一个类的級 (—of a class) 65, 71, 85; 一个关系的級 (—a relation), 85

序列关系 (Ordering relation), 94—95

证明 (Proof), 1, 11, 44—46, 114, 118, 122, 127—130; 凭借解釋的证明 (—by interpretation), 123, 194; 归謬证明 (—by reductio ad absurdum), 参見: 間接证明

納盖 (E. Nagel), 216

运算 (Operation(s)), 103, 105, 159—160, 171, 173, 182—183, 187, 205—207; 类的运算 (—on classes), 74—76, 89; 关系的运算 (—of relations), 87, 89—90

运算符 (Operator), 7, 9—11, 61, 69

运算的单位元素 (Unit element of an operation), 205, 207, 209

車尔赤 (A. Church), 132, 216

亨丁頓 (E. V. Huntington), 135, 200,

- 212
 貝安諾(G. Peano), 116, 200
 貝爾納斯(P. Bernays), 134, 215
 伽羅華(E. Galois), 160
 “應變項”(“Dependent variable”), 97
 我們說(We say that), 31—32
 懷特海(A. N. Whitehead), 16, 79;
 懷特海與羅素, 16, 79, 214.
 希爾伯特(D. Hilbert), 116, 131, 134,
 200; 希爾伯特與阿克曼(—and Ackermann), 215; 希爾伯特與貝爾納斯(—and Bernays), 215.
 充分條件(Sufficient condition), 26
 詞典序列(Lexicographical order), 110
 判定問題(Decision problem), 129, 131—132, 145
 克朗納斯(Diodorus Cronus), 24
 作為前提的理論(Presupposed theory)〔作為前提的學科(—discipline)〕, 參見: 在…前的理論
 完全的公理系統(Complete axiom system), 完全的演繹理論(Complete deductive theory), 129, 131—132, 146, 193; 完全的證明(Complete proof), 44, 129, 150
 這就是所要證的(Q. e. d. [quod erat demonstrandum]), 152
 形式的指謂(Suppositio formalis), 實質的指謂(—materialis), 57
 形式化的演繹理論(Formalized deductive theories), 127, 140—141
 那(The), 98
 那麼(Then), 參見: 如果…, 那麼
 和(Sum), 參見: 代數和, 類的和(—of [union] of classes), 74; 數之和(相加的結果)(—of [result of adding] numbers), 148; 關係的和(—[union] of relations), 88; 語句的和(—of sentences), 參見: 語句的析取式
 或(Or), 16, 18—20, 24, 36, 133, 154—155
 或者…或者(Either…or), 18, 153
 表(Table), 參見: 真值表
 表达式〔一種語言的表达式, 語言的表达式〕(Expression(s) [—of a language, linguistic—]), 55—60, 61—64, 66—69, 78, 83, 100, 109; 包含變項的表达式(—containing variables), 2—4
 表示一種性質(Express a property), 69; 表示一種關係(—a relation), 86, 100
 表示一個指示詞(Stand for a designation), 表示一個名稱(—name), 表示一個語句(—sentence), 4—5, 64
 定義(Definition), 30, 114—115, 127—128, 144, 171—173
 定義與證明的形式化(Formalization of definitions and proofs), 127
 定冠詞(Definite article), 98
 定律(Law(s)), 參見: 斷定了的命題; 數的加法定律(—of addition of numbers), 159, 161—162, 不對稱律(—asymmetry), 149; 閉系統定律〔豪伯定律〕(—closed systems [Hauber's—]), 166—167 交換律(—commutation), 143; 合成律(—composition), 136; 連通性定律(—connexity), 153, 186; 連續性定律(—continuity), 參見: 連續性公理; 矛

八 画

盾律(—contradiction), 41, 130; 又参見: 类的理論方面的矛盾律; 逆反定律(易位定律)(—contraposition (—transposition)), 43—44, 166, 167; 演繹法定律(演繹定理)(—deduction (deduction theorem)), 121—123, 184, 199; 稠密性定律(—density), 201; 两重余类的定律(—double complement), 82; 双重否定定律(—double negation), 50; 等式和不等式的等价变换定律(—equivalent transformation of equations and inequations), 168, 174; 排中律(—excluded middle), 41, 130; 又参見: 类的理論方面的排中律; 同一律(—identity), 35; 又参見: 类的理論方面的同一律; 不自反律(—irreflexivity), 149, 151; 单調定律(—monotony), 162, 174, 206; 数的次序的定律(—order for numbers), 147, 149; 归謬律(—reductio ad absurdum), 150; 自反定律(—reflexivity)(在同一理論中), 55, (在类的理論中), 72; 右分配律(—right distributivity), 206; 右可反性定律(—right invertibility), 161, 203; 語句演算的定律(—sentential calculus), 33, 35, 40, 42, 51, 64, 82, 140—141, 146; 数的减法的定律(—subtraction of numbers), 174; 对称定律(—symmetry), 55; 重言定律(—tautology), (在語句演算中(in sentential calculus)), 41; (在类的理論中(in the theory of classes)), 75; 类的演算的(理論的)定律(—the calculus(—theory) of classes),

72—76, 82, 136—138; 直言三段論定律(—the categorical syllogism), 73, 74, 81; 假言三段論定律(—the hypothetical syllogism), 36, 142; 三段論定律中的 Barbara 式(—the syllogism Barbara), 74; 同一理論的定律(—the theory of identity), 52, 53, 92; 关系理論的定律(—the theory of relations), 118, 158, 197; 傳遞定律(—transitivity)(在算术中(in arithmetic)), 149, (在同一理論中(in the theory of identity)), 55, (在类的理論中(in the theory of classes)), 72; 易位定律(—transposition), 参見: 逆反定律; 强三分律(—trichotomy (strong)), 153, 弱三分律(weak), 149

定理(Theorem)(被证明的命題(proved statement)), 1, 114, 128—129

图形(Figure), 参見: 几何图形

图形(Configuration), 参見: 几何图形
图解法的方法(Graphical method), 125

易位(Transposition), 参見: 逆反定律
空类(Empty class, Null class), 70

73, 76; 空关系(—relation), 87

学科(Discipline), 参見: 理論

罗素(B. Russell), 16, 71, 79, 213, 214

罗素悖論(Antinomy of Russell), 71

性质(Property(ies)), 52, 54, 69, 74, 90; 运算的性质(—of operations), 105, 159—160; 关系的性质(—relations), 90, 92, 94, 96, 111, 118

变項(Variable), 1—5, 45, 64—65, 85—86, 96, 104, 133; 变数(“—number”), 变量(“—quantity”), 2, 97

函項〔函項关系, 一多关系〕(Function [Functional relation, one-many relation]), 96—102, 103—105; 有一个, 两个…变項的函項 (—of one, two…variables [有一个, 两个…主目的函項 (—with one, two…arguments))), 104; 函項值 (一个函項的值, 应变項的值 (—value [value of a—, value of the dependent variable])), 96—97, 99, 100

函項关系(Functional relation), 参見: 函項; 又見: 四項关系, 多項关系, 三項关系, 兩項关系

函項演算(Functional calculus)〔量詞演算 (Calculus of quantifiers), 假变項的理論 (theory of apparent variables)], 62

实数(Real number (s)), 1, 147—148, 200; 又参見: 数

实质蘊函 (Material implication, implication in material meaning), 23—24, 41

命題(Statement), 参見: 断定了的命題
命題演算 (Propositional calculus), 参見: 語句演算

所有(All), 8

阿克曼(W. Ackerman), 215

阿貝尔(N. H. Abel), 160

阿貝尔群(Abelian group), 160

非負数(Non-negative number), 非負数的整数 (—integer), 77, 101—102

波斯特(E. L. Post), 132

波察諾(B. Bolzano), 103

欧几里德(Euclid), 115

杰尔哥納(J. D. Gergonne), 73

單調运算(Monotonic operation), 162, 206

单值函項(Single-valued function), 99

单称語句(Singular sentence), 7

高等几何(Advanced geometry), 132

經驗科学(Empirical science(s)), xxii—xxiii, 99, 213

直言三段論(Categorical syllogism), 参見: 直言三段論定律

构造論方法 (Constructive method), 216

承认前件的推理規則 (Modus ponens rule), 参見: 分离規則

“空虛地”被滿足的蘊函式 (“Vacuously” satisfied implication), 73

九 画

点 (Point), 65, 101—102, 125, 175, 参見: 点的軌迹

点的集合(Set of points), 参見: 几何图形, 点的軌迹; 数的集合 (—numbers), 整数的集合 (—integers), 65, 66, 120, 121, 147, 161, 187, 194, 201—202

点的軌迹〔所有点的集合〕(Locus of the points [Set of all points]), 67

类(Class(es))〔集合(Set(s))], 65—80, 81—85, 87, 89, 101—103; 由所有事物构成的类, 使得, (Class of all things such that), 67—69; 一級类, 二級类…(Class of the first, second, …order), 65, 71, 85

类的包含 (Inclusion of classes), 71, 73, 84, 95; 关系的包含 (—relations), 87

类的交〔积〕(Intersection [product] of classes), 74; 关系的交 (—relations), 88

类的积(交)(Product of [intersection of] classes), 74; 数的积〔…乘…的结果〕(— [result of multiplying] numbers), 203; 关系的积〔绝对积, 交〕(— [absolute —, intersection of] relations), 88—89; 語句的积(— sentences), 参見: 合取式

类的加法 (Addition of classes), 74—75, 82; 数的加法 (— numbers), 159, 161—162, 206; 語句的加法(— sentences), 参見: 語句的邏輯加法

类的乘法 (Multiplication of classes), 74—76; 数的乘法 (— numbers), 205—207; 語句的乘法 (— sentences), 参見: 語句的邏輯加法

类的余类 (Complement of a class), 76, 83, 105; 余关系(否定关系)(Complement[negation] of a relation), 88, 111

类的理論方面的矛盾律 (Class-theoretical law of contradiction), 76; 类的理論方面的摩根定律 (Class-theoretical law of De Morgan), 82; 类的理論方面的同一律 (Class-theoretical law of identity), 72, 95; 类的理論方面的排中律 (Class-theoretical law of excluded middle), 76

类与类間的基本关系 (Fundamental relation among classes) 71—73; 数之間的基本关系 (— numbers), 149; 基本眞值表(— truth table), 33, 140

某一(A certain), 8

某些(Some), 8

逆反(Contraposition), 参見: 逆反定律

逆反語句(Contrapositive sentence),

42, 44

相異(Diversity), 84, 89, 95, 154

相等(Equality), 51, 58—60, 84, 92, 94; 几何图形的相等 (— of geometrical figures), 60, 94; 数的相等 (— of numbers), 59—60

相交的类(Intersecting classes, Overlapping classes), 72—73; 相交关系(Overlapping relations), 84

相等的类(Equivalent classes), 参見: 等数的类; 相等的数 (— numbers), 120; 等值的語句(— Sentences), 29—32, 50; 等式和不等式的等价变换(— transformation of equations and inequalities), 参見: 等式和不等式的等价变换定律

冠詞(Article), 参見: 定冠詞

科学(Science), 参見: 理論

科学語言(Scientific language), 22; 科学理論(— theory), 1

括弧(Parenthesis), 36

負数(Negative number), 負的整数 (— integer), 1, 79, 101, 102, 194

复数(Complex number), 1, 200, 212

指示(Denote[designate]), 2, 4—5, 15, 27, 58, 99, 100, 133

指示詞(Designation)(“摹状詞”(“description”), 4—5, 55—56, 58

指示(摹状)函項(Designatory [descriptive] function), 4, 5, 27, 69, 100

語詞(Term(s)), 1, 15

语法(Syntax), 参見: 邏輯語法

語言(Language), 56—57, 参見: 日常語言, 科学語言

語言的表达式(Linguistic expression (s)), 参見: 表达式

語句(Sentence (s)), 1—3, 5—9, 16—

- 20, 21—23, 56—58, 63—64, 126—128, 130—131, 146, 183—184; 具有存在性质的語句 (— of an existential character), 参見: 存在語句; 具有普遍性质的語句 (— a universal character), 参見: 全称語句
- 語句演算(命題演算, 演繹理論) (Sentential calculus [propositional calculus, theory of deduction]), 16, 51, 64, 82, 131, 140—141, 144—146, 212; 語句联詞 (Sentential conjunction), 16; 語句函項 (Sentential function), 2—6, 9—10, 12, 34, 36—37, 39, 45, 66—70, 84, 86, 100, 118, 122, 128, 140—141; 語句变項 (Sentential variable), 34, 45, 64
- 語句的析取式(邏輯和) (Disjunction [logical sum] of sentences), 16, 17, 20, 37, 133, 154
- 語句的邏輯加法 (Logical addition of sentences) 35, 41, 50; 邏輯概念 (— concept), 邏輯常項 (— constant), 邏輯語詞 (— term), 15, 51, 77—78, 106, 115, 128, 133, 214; 邏輯的同一 (— identity), 参見: 同一; 邏輯定律 (— laws), 15, 50—52, 73—74, 79, 106, 115, 130; 語句的邏輯乘法 (— multiplication of sentences), 34, 41, 50; 語句的邏輯积 (— product of sentences), 参見: 合取式; 語句的邏輯和 (— sum of sentences), 参見: 語句的析取式; 邏輯符号 (— symbol, — symbolism), 36, 41, 53, 67—68, 70, 75—76, 87—89, 98—99, 100, 104, 138, 141, 144, 145, 150; 邏輯語法与演繹科学的語义学 (— syntax and semantics of deductive sciences), 134, 邏輯类型 (— type (s)), 71
- 語句的等价的系統 (Equipollent systems of sentences), 162, 182, 186, 187; 等价的詞項的系統 (Equipollent systems of terms), 126, 192, 198
- 語句演算中的規則 (Rule (s) in sentential calculus), 140; 定义規則 (— of definition), 32, 127—128, 144; 分离規則 (承认前件的推理規則) (— detachment [modus ponens]), 45, 46, 141—145; 推理規則 (证明規則) (— inference [— proof]), 46—47, 51, 128—129, 134, 141
- 语义学 (Semantics), 参見: 邏輯語法与语义学
- 結合律 (Associative laws) (在算术中), 161, 182; 結合定律 (在語句演算中), 41; 結合定律 (在类的理論中), 75; 結合的运算 (— operation), 160, 182
- 重言式 (Tautology), 参見: 重言定律
- 選擇公理 (Multiplicative axiom), 213
- 独立的公理系統 (Independent axiom system), 公理彼此独立的系統 (A system of mutually independent axioms), 127, 183; 独立的基本詞項的系統 (— system of primitive terms), 互相独立的基本詞項的系統 (System of mutually independent primitive terms), 127, 187
- 绝对的存在語句 (Absolutely existential sentence), 7
- 給函項指定一个值 (Assign a value of a function), 参見: 一个函項的相应值
- 是由一个, 二个, ..., n 个元素构成的 (Consist of one, two, ..., n - ele-

ments), 77—78

十 画

論(Discourse), 参見: 論域

論域 (Universe of discourse), 70, 91, 147, 161

原則 (Principle), 参見: 方法論的原則;
抽象原則 (— of abstraction), 93

倒退 (Regress), 参見: 无穷倒退

格来林 (K. Grelling), 215

哥德尔 (K. Gödel), 132

哥丁根中心 (Göttingen center), 134

烏德格 (J. H. Woodger), 213

眞变項 (Real variable), 参見: 自由变
項

眞語句 (True sentence), 1, 3, 5—6,
17—19, 28, 33, 38—41, 56, 58, 130,
140, 166, 167

眞值表 (Truth table(s) (Matrix)),
37—38, 39—41

眞正子类 (Proper subclass), 参見: 部
分

眞值函項 (Truth function), 35, 37

被证明的命題 (Proved statement) (被
证明的語句 (— sentence)), 参見: 定
理

被否证的句子 (Disproved sentence),
130

被定义者 (Definiendum), 定义者 (defi-
niens), 32—33, 144, 171—173

連通的关系 (Connected relation),
91, 94—96, 111, 152

連續的关系 (Continuous relation),
201

連續地有序交換群 (Continuously or-
dered Abelian group), 203; 連續地
排成次序的类 (— class), 202; 連續

地有序域 (— field), 207

被定义的詞項 (Defined term), 113,
114, 140, 144

特有的表达式 (Specific expression),
特有的命題 (— statement), 特有的
語詞 (— term), 15, 115, 128

十一 画

域 [交換域] (Field (commutative—)),
205

属于 (Belong to), 66, 86

排中 (Excluded middle), 参見: 排中律
符号 (Symbol), 2, 55, 58

符号 (Symbolism), 参見: 邏輯符号; 語
句演算的符号 (— of sentential cal-
culus), 35

符号 (Sign(s)), 109

符号邏輯 (Symbolic logic), 参見: 数理
邏輯

符号邏輯学会 (Association for Sym-
bolic Logic), 216

符号邏輯杂志 (Journal of Symbolic
Logic), 216

维他 (F. Vieta), 11

推出 (Follow), 26, 28, 41

推論 (Inference), 参見: 間接证明, 推論
的規則

推論 (Mode of inference), 参見: 間接
证明

推导出来的 (演繹出来的) 命題 (Deri-
ved (deduced) statement), 114

理論 (Theory) [学科 (discipline), 科学
(science)], 参見: 演繹的理論, 数学
理論, 科学理論; 約束变項的理論 (—
of apparent variables), 参見: 函項
演算; 类的理論 (— classes), 65—66,
67, 69; 演繹理論 (— deduction); 参

見: 語句演算; 群論(—groups), 105, 161; 同一理論(—identity), 51—52, 53; (邏輯) 类型理論(—[—logical] types), 71, 213; 證明論(—proof), 134; “性質論”(—properties), 69; 关系的理論(—relations), 84—85, 118, 158, 197; 集合論(—sets), 參見: 一般集合論
 康脫(G. Cantor), 66
 常項(Constant), 1, 2—5, 15; 參見: 邏輯常項(Logical constant), 数学常数(Mathematical constant); “常数”(Constant number), “常量”(Constant quantity), 2, 97
 虛數(Imaginary number), 1
 邏輯(Logic), xviii—xxiv, 15—16, 74, 105—106, 128, 131, 133; “演繹科學的邏輯”(—of deductive sciences), xxii, “經驗科學的邏輯”(—of empirical sciences), xxii
 邏輯斯蒂(Logistic), 參見: 数理邏輯
 邏輯積的因子 (Factor of a logical product), 參見: 合取式的元素; 數的積的因子 (—a product of numbers), 204; 相對積的因子(—a relative product), 159
 邏輯和的被加項(Summand of a logical sum), 參見: 析取式的元素; 數(被加數)的和(—a sum of numbers), 148, 161
 閉的類(Closed class), 160; 閉語句系統(Closed systems of sentences), 166—168
 假變項(Apparent variable), 參見: 約束變項
 假語句(False sentence), 6, 17—18, 33—40, 130, 165, 170

假言三段論(Hypothetical syllogism), 參見: 假言三段論定律
 基本命題(Primitive statement), 參見: 公理; 基本[未定義的]詞項(—(undefined) term(s)) [符号(—symbol(s))], 113—115, 140—141, 144, 147, 185, 187, 192—193, 195, 198, 200—201, 203, 205, 207—208
 現代邏輯(Modern logic), 參見: 数理邏輯
 萊布尼茲(G. W. Leibniz), 16, 53
 萊布尼茲定律(Leibniz's law), 53, 59—60, 69
 “混合的”关系(“Mixed” relation), 85
 部分(Part) [真正子类(Proper subclass)], 72, 73, 102
 斷定了的命題(斷定, 定律, 命題)(Asserted statement (assertion, law, statement)), 1, 114, 122

十二画

量(Quantity), 參見: “常量”, “变量”
 量詞(Quantifier(s)), 7—8, 13, 133
 集合(Set(s)), 65
 費羅(Philo of Megara), 24
 等於(Equal to), 52, 54, 55; 參見: 同一, 小于或等于
 等式(Equation), 27, 59, 157, 168
 等式的一方(Side of an equation), 不等式的一方(—inequality), 157, 168; 等值式的一方(—equivalence), 29
 等式的左方(Left side of an equation), 不等式的左方(—inequality), 157; 等值式的左方(—equivalence), 29
 等數的[相等的]類(Equinumerous

(equivalent) classes), 77, 93, 102
 等值(作为关系的范畴的), (Equivalence [as a category of relations])
 93; 等值式(作为语句的范畴的 [—sentences]), 29—30, 145
 等数的类; 相等的数(Equivalent numbers), 120; 相等的语句(—sentences), 29—30, 50; 等式和不等式的等价变换(—transformation of equations and inequalities), 参见: 等式和不等式的等价变换定律
 循环(Circle), 参见: 循环定义
 循环定义(Vicious circle in definition), 32, 78, 114(恶性循环); 循环证明(—proof), 33
 萧尔兹(H. Scholz), 215
 间接证明(Indirect proof), (间接推论(—inference, —mode of inferendce), 归谬证明(Proof by reductio absurdum)), 150, 166, 170
 斯多噶学派(Stoic School), 24
 确立一个序列(Establish an order), 94; 建立了一个——对应(以——对应的方式把…映射在…)(—a one-to-one correspondence [map in a one-to-one manner]), 101—102,

十三画

零(Zero), 172, 203, 205—207
 楊(J. W. Young), 213
 群(Group(s)), 159—161; 又参见: 阿貝尔群
 数(Number(s))(实数(real—)), 1—2, 58—59, 66, 78, 98—99, 125, 193—196; 数线(—line), 175—176; 一个类的元素的数(—of elements of a class), 参见: 一个类的基数

数学(Mathematics), xviii—xxi, xxiii, 1, 11, 25—26, 27, 51, 98—100, 105, 113—114—116, 124, 128, 213
 数的商(Quotient of numbers), 173
 数…的差(从数…减去数…的结果)(Difference of [result of subtracting] numbers), 171
 数的减法(Subtraction of numbers), 171, 174
 数值常项(Numerical constant), 4; 数的量词(—quantifier), 61, 62
 数学的概念(Mathematical concept), 数学的常项(—constant), 数学的语句(—term), 1, 15, 61, 124; 数理逻辑(现代、演绎、新、符号逻辑; 逻辑斯蒂)(—logic [contemporary, modern, deductive, new, symbolic logic; logistic]), xviii, xx, xxiv, 15—16, 28, 115, 129, 213, 214—216; 数学的证明[数学的推理](—proof [—reasoning]), 11, 25, 51, 106, 128; 数学符号(—symbol), 2, 59—60, 78, 116, 119, 148, 154, 157, 171—172, 200—201; 数学的定理(—theorem), 1, 7, 11, 26, 27, 48, 51, 59; 数学理论(—theory)(数学学科, 数学科学)(—theory [—discipline, —science]), 115—116, 124, 128—129, 160
 数理逻辑的目录(Bibliography of mathematical logic), 216
 意义(Meaning), 25, 30, 92, 113—115, 128
 路易士(C. I. Lewis), 25, 212; 路易士与兰福德(—and Langford), 212
 路加西维契(J. Lukasiewicz), 16, 134
 新逻辑(New logic), 参见: 数理逻辑
 解析几何(Analytic geometry), 125

稠密的关系 (Dense relation), 201—202

稠密地有序交换群 (Densely ordered Abelian group), 202

十四画

算术 (Arithmetic) 1, 4, 58—59, 76, 78—79, 115—116, 125, 132, 192—194, 202; 实数算术, (—of real numbers), 147, 200, 212

算术上的相等 [数与数之间的相等], (Arithmetical equality [equality of numbers]), 59

豪伯 (K. F. Hauber), 167

豪伯定律 (Hauber's law), 参見: 閉語句系統

演算 (Calculus), 参見: 語句演算 (Sentential calculus); 类的运算 (Calculus of classes), 66, 71, 74, 76, 82, 87, 135, 137—138; 量詞演算 (Calculus of quantifiers), 参見: 函項演算; 关系的运算 (Calculus of relations), 84, 87, 89—90, 111

演繹 (Deduction), 参見: 語句演算; 演繹出来的命題 (Deduction of a statement), 参見: 推导出来的命題; 演繹定理 (Deduction theorem), 参見: 演繹法定律

演繹邏輯 (Deductive logic), 参見: 数理邏輯; 演繹方法 (Deductive method), 113, 115, 213; 演繹的理論 (Deductive theory) [演繹学科 (Deductive discipline), 演繹科学 (Deductive science)], 113, 115—116, 125, 146, 184, 199

演繹出来的命題 (Deduced statement), 参見: 推导出来的命題

演繹科学方法論 (Methodology of deductive sciences) [数学方法論 (—mathematics)], xix, xx, xxiii, 113, 122—123, 133, 134, 212—213; 經驗科学的方法論 (—empirical sciences), xxii—xxiii

演繹科学的形式特性 (Formal character of deductive science) [数学的形式特性 (—mathematics)], 121, 124, 128; 形式蘊涵 (—implication [implication in—meaning]), 23—24; 形式系統 (—system), 124

满足一个語句函項 (Satisfy a sentential function) [满足一个条件 (—a condition)], 3, 6, 12, 61—62, 67, 70, 86, 119, 121

綫 [直綫] (Line [straight line]), 101, 175; 綫段 (—Segment), 参見: 綫段; 綫段 (Segment) (綫 (line)), 101, 116—117, 126, 138

概念 (Concept), 参見: 邏輯概念, 数学的概念, 方法論的概念

十五画

摩根 (De Morgan), 50, 84

摩根定律 (De Morgan's law), 50; 又参見: 类的理論方面的摩根定律

整数 (Integer), 77, 132, 194

“摹状詞” (“Description”), 参見: 指示詞 (Designation)

摹状函項 (Descriptive function), 参見: 指示函項

十七画

戴德鏗 (R. Dedekind), 201

戴德鏗公理 (Dedekind's axiom), 参

見: 連續性公理

十 九 画

蘊函(ImPLY), 26—28, 41

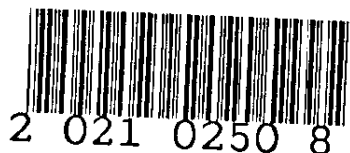
蘊函式〔条件語句〕(Implication [conditional sentence]), 20—26, 28, 38,

42—44, 167, 170

形式蘊函 (—in formal meaning),
參見: 演繹科學的形式的特性; 實質蘊

函 (—in material meaning), 參見:

實質蘊函 (Material—)



譯者后記

塔尔斯基(1902—, 原籍波兰, 1945 年入美国籍)的《邏輯与演繹科学方法論导論》, 是一本頗为流行的数理邏輯入門书。1936 年以波兰文出版。1937 年譯成德文, 1940 年又譯成英文, 在 1946 年的英文譯本中, 著者又作了一些小的修改。1948 年又譯成俄文。我們这个譯本, 是根据 1946 年英文譯本譯出的。俄文譯本中, 有一个长序, 对本书內容作了評價, 并附有編輯部的注和跋。我們也一并譯出, 供讀者參考。

本书第一章至第五章, 是周礼全翻譯的。第六章, 是吳允曾翻譯的。第七章至第十章, 是晏成书翻譯的。其中部分譯稿曾由顾寿观校訂过。序言和索引是承商务印书館編輯部协助翻譯編制的。

俄譯本的序言, 是晏成书翻譯, 俄譯本編輯部的注和跋, 是郭英翻譯的, 晏成书校訂的。

譯者 1962 年 4 月